جزوه درس:

تحقیق در عملیات ۱

هر آنچه که در این جزوه می خوانید حاصل زحمات دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف می‌باشد که دانسته‌های خود از حضور در کلاس استاد محترم، دکتر عشقی را مکتوب کرده اند.

استفاده از این جزوات برای تمامی دانشجویان کاملا رایگان می‌باشد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تحقیق در عملیات ۱

فصل ۱ : تعاریف مقدماتی و مدل سازی ریاضی

* تعریف دقیق و مشخصی برای OR وجود ندارد اما می توان گفت .

تحقیق در عملیات در واقع استفاده از "مدل سازی ریاضی" در "حل مسائل واقعی تصمیم گیری"، به منظور تعیین "بهترین تصمیم ممکن" است

* تحقیق در عملیات بخشی از ریاضیات کاربردی است

* OR در دیدگاهی کلی به دو شاخه اصلی تقسیم می شود :

۱. مدل ها احتمالی 2. مدل ها قطعی (Deterministic Models)

در مدل ها قطعی فرض می شود کلیه داده ها و پارامترها مدل قطعی و مشخص است

در مدل ها احتمالی (probabilistic Models) حداقل یکی از داده ها یا پارامترهای مدل، حالت عدم قطعیت دارد.

قطعی : برنامه ریزی خطی 21 - 711 21 - 751
" غیر خطی 712 -
" عدد صحیح 715 -
" پویا 716
" حمل و نقل 761 -
" شبکه 536 -

PAPCO

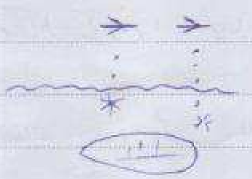
Subject:
Year. Month. Date.

احتمالی : تئوری صف 21_742
تئوری تصمیم گیری .138
فرآیندهای تصادفی .746
شبیه سازی .342
پیش بینی
کنترل موجودی

تاریخچه تحقیق در عملیات :

در طول جنگ جهانی دوم تیمی متشکل از تعدادی ریاضیدان ، فیزیکدان ، مهندس در انگلستان تحت نظر فیزیکدانی به نام Blackett تشکیل شد که سعی آن ها تحقیق بر روی عملیات نظامی ، و ارائه راه حل عملی برای آن بود. مسئله اول :

در چه ارتفاعی بمب رها شود تا بیشترین صدمه را به زیردریایی بزند؟

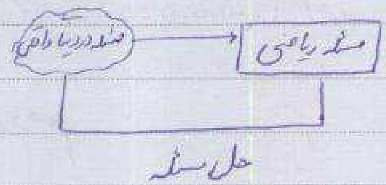


مساله دوم : محل استقرار رادارها در کجای شهر باشد تا با کمترین تعداد رادارها کل شهر پوشش داده شود ؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

OR در اقتصاد بسیار مؤثر است

اولین گام در جهت حل یک مسئله تصمیم گیری، مدل سازی مسئله است.



تمرین: جهت تبدیل یک مسئله در دنیای واقعی به یک مدل ریاضی باید فرضیات مطرح شده را چگونه در نظر گرفت؟

مدل سازی ریاضی مسئله در قالب زیر را برنامه ریزی ریاضی (Mathematical programing) گویند.

* یک مدل برنامه ریزی ریاضی از عناصر زیر تشکیل می شود:

I) متغیرهای تصمیم گیری (Decision Variables) مجهولات (متغیرهایی) هستند که در مدل وجود دارند و هدف از حل مدل تعیین "بهترین" مقدار برای آنها با توجه به عناصر بعد است.

II) تابع هدف (Objective function): تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم گیری است

Subject :
Year . Month . Date . ( )

که بیانگر هدف مسئله در قالب یک تابع ریاضی است. در الف مسائل این تابع

هدف به صورت حداکثر سازی/بیشینه سازی (Maximization) یا حداقل سازی/

کمینه سازی (Minimization) است که به ترتیب آنها را Max و Min

نشان می دهیم.

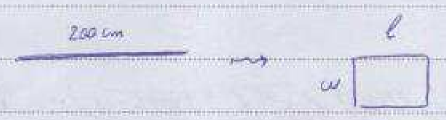
III) محدودیت ها (Constraints): محدودیت های موجود در مدل هستند که متغیرهای

تصمیم گیری مجاز به نقض آن نیستند.

مثال: یک میله پلاستیکی که قابلیت انعطاف و تغییر شکل را دارد به طول 200 cm

در اختیار داریم. می خواهیم آن را به صورت مستطیل در آوریم که مساحت آن حداکثر

باشد. ابعاد آن؟



متغیرهای تصمیم گیری: طول l

عرض w

تابع هدف: $Max\ Z = lw$

محدودیت ها: $l + w = 100$ s.t. ← Subject to

(مستقیماً از صورت مسئله نتیجه شده)

$l, w \geq 0$ (محدودیت علامت: وابسته به علامت متغیرها)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

... حل می کنیم :

$l^* = w^* = 50$

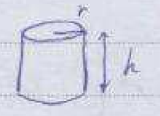
$z^* = 2500$

* به بهترین مقدار متغیرها که ضمن ارضای کلیه محدودیت ها مسئله، مقدار تابع هدف را نیز به بهترین مقدار ممکن می رساند، جواب بهینه (Optimal Solution) گویند.

* به جواب هایی که در کلیه محدودیت ها مسئله صدق می کنند اما ضرورتاً جواب بهینه نیستند جواب موجه (Feasible Solution) گویند.

* جواب بهینه حتماً جواب موجه هم هست اما برعکس نه.

مثال: در یک کارخانه تولید رنگ، رنگ ها تولیدی در قوطی ها استوانه ای ریخته شده و به دست مشتری می رسد. می دانیم که هر cm^2 از ماده تشکیل دهنده این قوطی ها $0.5g$ وزن دارد. با می خواهیم وزن قوطی ها بیش از $250g$ نشود (مثل از ریختن رنگ) ابعاد قوطی ها چقدر باشد تا حجم قوطی ها max شود؟



متغیرها تصمیم گیری : شعاع r
ارتفاع h

تابع هدف : $\max \; v = \pi r^2 h$

s.t

PAPCO

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

محدودیت ها : مساحت کل $\times 0.5 \leq 250$ $\Leftarrow$ وزن ≤ 250

$r,h \geq 0$ $\qquad \Rightarrow (2\pi r^2 + 2\pi rh) \times 0.5 \leq 250$

* در مدل های برنامه ریزی ریاضی علامت بکار رفته جهت محدودیت ها باید $\leq$ یا $\geq$ یا $=$ باشد ($>$ و $<$ نداریم)

r,h اگر 0 باشند جواب موجه هستند اما بهینه نیستند

اگر محدودیت ها نباشند r و h ∞ ، V را Max می کنند اما محدودیت داریم.

$\leftarrow$ روش حل مسئله ، تمرین تشویقی

* چارچوب کلی یک مدل برنامه ریزی ریاضی :

$$\max(\min)\ z = f(x_1, \dots, x_n)$$

s.t.

محدودیت ها : $\quad g_i(x_1, \dots, x_n) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} \right\} b_i \qquad x_1, \dots, x_n \geq 0$

$i = 1, \dots, m$

* یک تابع نظیر $f(x_1, \dots, x_n)$ را تابع خطی (Linear Function) گویند اگر :

$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + k$ که در آن $c_1, \dots, c_n$ و k مقادیر ثابت هستند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر در مدل برنامه ریزی ریاضی ، کلیه توابع موجود خطی باشند به آن مدل برنامه ریزی خطی ، (Linear Programming) گویند که آن را به اختصار با LP نمایش می دهند

ولی اگر حداقل یکی از این توابع خطی نباشند و یا قابل تبدیل به مدل خطی نباشند آن را مدل برنامه ریزی غیرخطی (Nonlinear P.-) یا NLP گویند .

* چارچوب کلی یک برنامه ریزی خطی (LP) :

$$Max(Min)\ Z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n \quad *$$

محدودیت: s.t.

1) $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \ \{\ \}\ b_1$

2) $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \ \{\ \}\ b_2$

$\vdots$

m) $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \ \{\ \}\ b_m$

, $X_1, \ldots, X_n \geq 0$

* فرم ماتریسی مدل LP :

$$Max(Min)\ Z = CX$$

s.t.

$Ax \{\leq\} b$

$X \geq 0$

PAPCO

Subject:
Year.　　Month.　　Date.

X بردار متغیرها $= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 　　 C : بردار ضرایب متغیرها در تابع هدف $= (c_1, c_2, \dots, c_n)$

n متغیر و m محدودیت ← ماتریس ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها = ماتریس ضرایب $= A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

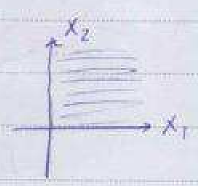
b بردار ضرایب سمت راست $= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

* اگر در محدودیت علامت متغیرها، بعضی یا تمام متغیرها از جنس اعداد صحیح غیرمنفی باشند مدل را «مدل برنامه‌ریزی اعداد صحیح» (Integer Programing model) گوییم و به اختصار با IP آن را نشان می‌دهیم: $x_i \geq 0$, Int

(x_i عدد صحیح غیرمنفی)

(LP)

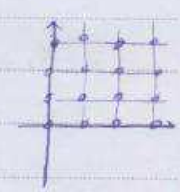
$x_1, x_2 \geq 0$



فضای پیوسته

(IP)

$x_1, x_2 \geq 0$, Int



فضای گسسته

Subject:
Year. Month. Date. ( )

** مدل سازی مسائل به صورت مدل های LP :

مدل برنامه ریزی تولید (Production Planning model)

3 محصول مختلف در یک کارگاه کوچک تولیدی با توجه به 3 نوع عملیات مختلف تولید می شوند. مدت زمان انجام هریک از عملیات بروی هر واحد از محصولات برحسب دقیقه و سایر اطلاعات در جدول زیر داده شده. می خواهیم میزان بهینه تولید روزانه هر محصول را با هدف حداکثر سازی سود کارگاه تعیین کنیم

	محصول 1	محصول 2	محصول 3	حداکثر زمان عملیات برحسب دقیقه/روز
تراشکاری	1	2	1	430
جوشکاری	3	0	2	460
ورق کاری	1	4	0	420
سود حاصل از تولید هر واحد محصول (تومان)	3000	2000	5000	

متغیرهای تصمیم گیری : تعداد محصول i که در روز تولید می شود : X_i $\quad i = 1, 2, 3$

تابع هدف : $\max\ Z = 3000X_1 + 2000X_2 + 5000X_3$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت ها:

① $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$

② $3X_1 + \cdot + 2X_3 \leq 460$

③ $X_1 + 4X_2 \leq 420$

④ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

نوع محصول مشخص شده + می تواند Int هم باشد.

، حل مدل با استفاده از نرم افزارها

* نرم افزارهای حل مدل های LP :

* CPLEX ، TORA ، MPL ، Lindo ، Lingo

ادامه مسئله برنامه ریزی تولید :

جواب بهینه : $X_1^* = 0$ ، $X_2^* = 100$ ، $X_3^* = 230$ $Z^* = 1,350,000$

* بر طبق جواب بهینه ، برنامه تولیدی جهت حداکثر سازی سود کارگاه به میزان 1,350,000 تومان در روز ، تولید محصول 2 و 3 به میزان به ترتیب 100 ، 230 واحد در روز و عدم تولید محصول 1 است.

حال فرض می کنیم مدیر کارگاه تمایل دارد از محصول شماره 1 ، حداقل 20 واحد تولید داشته باشد ⇐ محدودیت پنجم : ⑤ $X_1 \geq 20$

← جواب بهینه تغییر می کند

Subject.
Year. Month. Date.

در این حالت جواب بهینه را Z کم می شود : $Z^* = 1,260,000$

$X_1^* = 20$, $X_2^* = 100$, $X_3^* = 200$ $\Rightarrow$ (حداقل محصول 1 باید تولید شود)

حال مدیر کارگاه خواهان این است که مجموع تعداد محصولات 1 و 2 حداقل 150 تا باشد

(چون در مقدار بهینه قبلی صدق نمی کند ، محدودیت جدید اضافه شد)

(6) $X_1 + X_2 \geq 150$

$\Rightarrow Z^* = 1,060,000$, $X_1^* = 60$, $X_2^* = 90$, $X_3^* = \overset{140}{0}$

(اهمیت محصول 1 و 2 بالا رفته $\Rightarrow$ اینگونه شده)

تمرین تشویقی : درصورتی که ترتیب عملیات انجام فرآیند مهم بود به این ترتیب که :

محصول 1 ① → ③ → ② ~ مراحل

محصول 2 ③ → ①

محصول 3 ② → ①

و مابین هر عملیاتی 2min زمان تلف شده

و کلاً نیز 440 min در روز وقت داشته باشیم

مسئله برنامه ریزی رژیم غذایی (Diet Problem) :

اولین مدل واقعی که به وسیله LP مدل سازی و حل شد این مسئله بود که شامل تعیین رژیم غذایی برای نظامیان یک واحد نظامی بود که توسط Stigler مدل سازی و حل شد.

فرض کنید بخواهید برنامه تغذیه روزانه تان را در وعده ی صبحانه و ناهار خود را برنامه ریزی کنید با توجه به تنقلات موجود در بوفه دانشگاه شریف، اطلاعات زیر:

	کالری	کاکائو (g)	قند (g)	چربی (g)	هزینه (تومان)
هر قطعه کیک	400	3	2	2	500
هر ظرف بستنی (Scoop)	200	2	2	4	200
هر بطری نوشابه	150	-	4	1	300
هر بسته آجیل	500	-	4	5	800

با توجه به برنامه غذایی خود می خواهیم روزانه حداقل 500 کالری، 6g کاکائو، 10g قند و 8g چربی را استفاده کنیم، و کمترین هزینه را داشته باشیم. برنامه ؟

متغیرهای تصمیم گیری :

$X_1 =$ تعداد قطعه های کیک

$X_2 =$ بستنی

$X_3 =$ نوشابه

$X_4 =$ آجیل

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{Min } Z = 500X_1 + 200X_2 + 300X_3 + 800X_4$$

s.t.

محدودیت ها :

① $400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 \geq 500$

② $3X_1 + 2X_2 \geq 6$

③ $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$

④ $2X_1 + 4X_2 + 1X_3 + 5X_4 \geq 8$

⑤ $X_j \geq 0$, Int

Lingo: با نرم افزار

حل ← $Z^* = 900 \quad X_2^* = 3 \quad X_3^* = 1 \quad X_1^* = X_4^* = 0$

این رژیم بصورت زیر است :

750 کالری

6 g کاکائو

10 g قند (سمت چپ محدودیت ها)

13 g چربی

اگر در مسئله داده شود ، حداقل ها تبدیل به حداکثر می شود در اینصورت در محدودیت ها $\geq$ به $\leq$ تبدیل می شود . در اینصورت : $Z^* = 0$ ، $X_1^* = X_2^* = X_3^* = X_4^* = 0$

حال فرض کنید که حداقل سازی هزینه مورد نظر ما نباشد بلکه حداقل کالری را با توجه به سایر محدودیت ها داشته باشیم (تابع هدف عوض می شد)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

min $w = 400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4$

s.t.

(1) $3X_1 + 2X_2 \geq 6$

(2) $2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$

(3) $X_1 + 4X_2 + X_3 + 5X_4 \geq 8$

(4) $X_j \geq 0$

حل → $w^* = 750 \quad X_1^* = X_4^* = 0 \quad X_2^* = 3 \quad X_3^* = 1$

جواب عین مثلی ، چگونه بدون حل می توان گفت ؟

تمرین تشویقی : خلاصه یک مقاله که به کاربرد مدل سازی ریاضی در رژیم غذایی می پردازد (15-10 سال اخیر) 1 صفحه A_4

مسئله برنامه ریزی پرسنل (Work scheduling Prog.) :

یک بیمارستان نیازمند استخدام تعدادی پرسنل تمام وقت است. جدول زیر حداقل پرستار لازم در هر روز کاری را نشان می دهد. طبق قوانین بیمارستان هر پرستار باید 5 روز متوالی کار کند و سپس 2 روز متوالی استراحت کند. می خواهیم ضمن بر آوردن نیازها و قوانین بیمارستان، تعداد کل پرستاران استخدامی min شود.

PAPCO

Subject.
Year. Month. Date.

روز کاری	1	2	3	4	5	6	7
تعداد پرستار لازم	17	13	15	19	14	16	11

X متغیر ~~تصادفی~~ تصمیم گیری : تعداد پرستار روز i ام : X_i

(روش غلط)

$$Min\ Z = X_1 + X_2 + \dots + X_7$$

s.t

① $X_1 \geqslant 17$

② $X_2 \geqslant 13$ $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $X_1^* = 17$

$X_2^* = 13$

$X_7^* = 11$

⑦ $X_7 \geqslant 11$

⑧ $X_1, \dots, X_7 \geqslant 0$, Int

$Z^* = 105$

مشکل عمده ؟؟ تعریف متغیر تصمیم گیری : این متغیرها مستقل از هم نیستند و تلفیق دارند (تداخل و وابستگی)

✓ متغیر تصمیم گیری : X_i = تعداد پرستارهایی که شیفت کاری خود را روز i-ام شروع می کنند

$i = 1, \dots, 7$

(اینها مستقل اند چون هر دسته با دسته دیگر متفاوت است روز کار اش)

* با تعریف متغیر تصمیم گیری به این صورت در واقع عدم تداخل و استقلال متغیرهای تصمیم گیری تضمین می شود

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

(1) $x_1 + \quad\quad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$

(2) $x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$

(3) $x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad + x_6 + x_7 \geq 15$

(4) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad + x_7 \geq 19$

(5) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14$

(6) $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16$

(7) $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$

(8) $x_j \geq 0 ,$ Int

حل $\quad Z^* = 23 \quad\quad x_1^* , x_2^* , x_6^* = 4 , \; x_3^* = 2 , \; x_4^* = 6 , \; x_5^* = 0 , x_7^* = 3$

تعداد پرستار بهینه در هر روز :

روز کاری	1	2	3	4	5	6	7
تعداد بهینه پرستار (سمت چپ محدودیت‌ها)	17	15	17	19	16	16	15
مورد نیاز	17	13	15	19	14	16	11

⇐ هیچ روزی کمبود نداریم

تمرین تشویقی : قانون : 2 روز کار ، 2 روز استراحت (متوالی)

در روزهای زوج نیازمند حداقل 15 نفر در روزهای فرد نیازمند 18 پرستار.

برنامه کاری پرستاری ... ؟ $\quad x_{ij}$

P4PCO

مسئله کاستن ضایعات برش : (Trim-loss Problem)

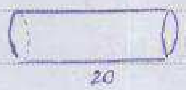
در یک کارخانه کاغذ سازی رول ها کاغذ - پهنای استاندارد 20 واحد تولید می شود طول رول ها کاغذ نیز استاندارد بوده و آنرا 1 در نظر می گیریم. سفارشات مختلفی که به این کارخانه می رسد براساس عرض مورد درخواست بریده می شود. هدف مدیریت کارخانه آن است که سفارشات مورد نظر با کمترین ضایعات بریده شود.

منظور از ضایعات هم دورریز کاغذ و هم تولید کاغذ اضافه بر سفارشات دریافتی است

فرض کنید یک مشتری سفارشات زیر را به کارخانه داده باشد. مطلوب است تعیین تعداد رول کاغذی که جهت انجام این سفارش باید بریده شود تا کل ضایعات حداقل شود؟

شماره سفارش	عرض درخواستی	تعداد رول درخواستی
1	5	150
2	7	200
3	9	300

اگر مجموع عرض ها 20 بود و تعداد یکسان

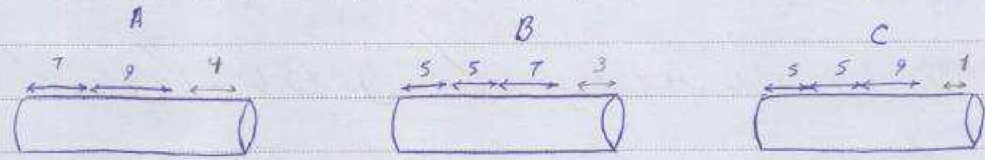


20

همان تعداد لازم بود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوی برش کارخانه :



جهت درک بهتر مسئله ابتدا فرض کنیم (مدیریت کارخانه) 3 الگوی فوق را جهت برش استفاده می کنیم

طرح تولیدی I جهت پاسخ گویی : 300 رول با A + 75 با B

— II — : 200 با A + 100 با C

کدام بهتر است ؟

اول باید ببینیم نیاز مشتری را برطرف می کند ! (موجه بودن) برای هر دو امکان پذیرند

	مساحت ناشی از دور ریز کاغذ	مساحت ناشی از اضافه تولید	کل مساحت ضایعات
طرح I	$300 \times 4 \times L + 75 \times 3 \times L$	$100 \times 7 \times L + 75 \times 7 \times L$	$2650L$
طرح II	$200 \times 4 \times L + 100 \times 1 \times L$	$50 \times 5 \times L$	✓ $1150L$

یا مساحت ضایعات = کل تولید - نیاز

I: $300 \times 20 \times L + 75 \times 20 \times L - 4850L = 2650L$ ✓

II: $200 \times 20L + 100 \times 20 \times L - 4850L = 1150L$ ✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال می خواهیم الگوها (طرح‌ها) مختلف تولید کنیم

عرض	1	2	3	4	5	6	~~7~~
5	0	2	2	4	1	0	3
7	1	1	0	0	2	0	0
9	1	0	1	0	0	2	0
ضایعات	4	3	1	0	1	2	

این الگو در ۴ جای دیگر
در واقع الگوهای دیگر جزئی
خواهند بود.

← طرح ها ۶

{ تمرین تشویقی: الگوریتمی بنویسید و اجرا کنید که با توجه به رول داده شده (مثلاً L) و عرض‌های مورد درخواست مثلاً ($l_1, l_2, \ldots, l_n$) بتواند الگوهای برش تولید کند }

x_j : تعداد رول هایی که با الگوی j برش داده می شود.

Min Z = کل مساحت ضایعات

کل مساحت ضایعات = کل مساحت تولیدی − کل مساحت مورد نیاز

$$= 20L(x_1 + \cdots + x_6) - L(150 \times 5 + 200 \times 7 + 300 \times 9)$$

$$= 20L(x_1 + \cdots + x_6) - 4850L$$

مقادیر ثابت در تعیین جواب بهینه نقش ندارند.

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

⇒ تابع هدف $\min Z = X_1 + \dots + X_6$

st

1. $2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 \geq 150$
2. $X_1 + X_2 + 2X_5 \geq 200$
3. $X_1 + X_3 + 2X_6 \geq 300$
4. $X_1, \dots, X_6 \geq 0, \text{Int}$

اگر = بگذاریم یک شرط اضافی اضافه کرده ایم

که لازم نیست چون می تواند اضافه تولید هم داشته باشد و اگر جواب همان مساوی

باشد، در این حالت هم بدست می آید

$37.5 \xrightarrow{\text{گرد کردن}} 37$　　جواب درست نمی آید

← حل تشویقی: حل با = و ≥ و با Int و بدون Int

تمرین تشویقی: در مورد مسئله مورد نظر، تاریخچه آن و روش های حل، انواع مختلف آن

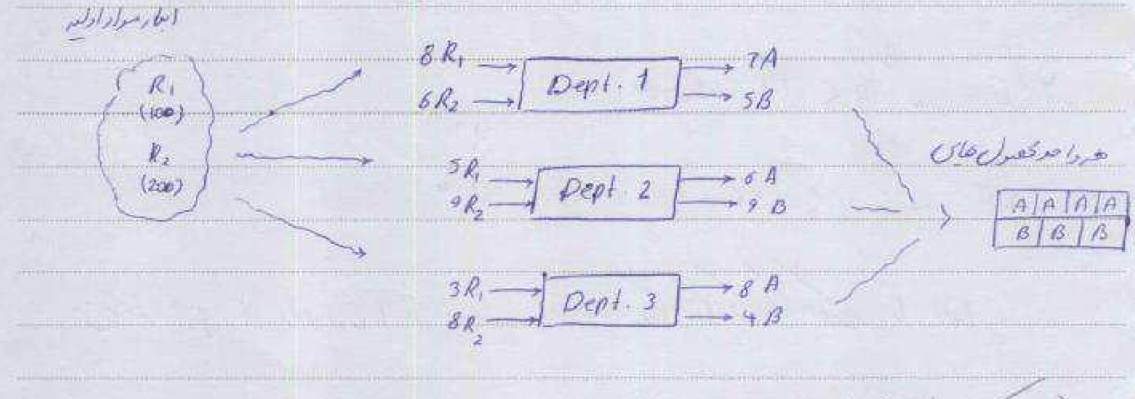
No Int: 0, 0, 0, 12.5, 100, 150　　$Z = 262.5$

Int: 0, 0, 25, 0, 100, 138　　$Z = 263$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله متوازن کردن خطوط مونتاژ: Assembly Line Balancing Problem

فرض کنید در یک کارگاه یک واحد محصول از مونتاژ 4 واحد قطعه A و 3 واحد قطعه B بدست می‌آید. قطعات A و B از مواد خام R_1 و R_2 تولید می‌شوند که به ترتیب 100 واحد و 200 واحد از آن در دسترس است. قطعات A و B در 3 دپارتمان تولیدی تهیه می‌شوند که تعداد قطعات تولیدی آنها بستگی به سیکل تولیدی (Production Cycle) آن دپارتمان در طی روز دارد. تعداد قطعات تولیدی A و B در هر سیکل تولیدی دپارتمان‌ها در نمودار زیر آمده. هدف تعیین تعداد سیکل تولیدی هر دپارتمان جهت max سازی محصول نهایی است.



{ یک محصول باید از 4 مرحله رد بشود

ظرفیت تولید 50 35 15 60

→ کمترین تولید تعیین کننده ← مطلوب نیست ← باید متوازن شود مثلاً 15 ← 45 {

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

X_j : تعداد سیکل تولیدی هر دپارتمان

محدودیت ها : ① $8X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 100$

② $6X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 200$

③ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$, Int

تعداد کل A تولیدی : $7X_1 + 6X_2 + 8X_3$ $\xrightarrow[\text{به درد محصول نهایی}]{\text{تعداد قطعه A که}}$ $(7X_1 + 6X_2 + 8X_3)/4 = E$

می خورد

تعداد کل B تولیدی : $5X_1 + 9X_2 + 4X_3$ $\xrightarrow[\text{تعداد B که}]{}$ $(5X_1 + 9X_2 + 4X_3)/3 = F$

...

تعداد محصول نهایی $= \min\{E, F\}$ ← در قالب مدل سازی چنین تابعی نداریم (باید خطی شود)

هدف :

$$\max Z = \min\left\{\frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}, \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}\right\}$$

محدودیت : ④ $Y = \min\{E, F\}$ ← هدف : $\max z = Y$

$$Y \leq E \rightarrow Y \leq \frac{7X_1 + 6X_2 + 8X_3}{4}$$

$$Y \leq F \rightarrow Y \leq \frac{5X_1 + 9X_2 + 4X_3}{3}$$

می خواهیم Y برابر E یا F شود، با توجه به اینکه هر کدام که کوچکتر باشد با اضافه شدن این دو محدودیت.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از کجا بفهمیم Y مساوی E یا F می‌شود؟ چون تابع هدف $\max Z = Y$

است، حتماً Y که بدست می‌آید عدد مقدار خود را که E یا F است می‌گیرد.

محدودیت ④

$$\begin{cases} \rightarrow 7X_1 + 6X_2 + 8X_3 - 4Y \geq 0 \quad \text{(عطر تند)} \\ \rightarrow 5X_1 + 9X_2 + 4X_3 - 3Y \geq 0 \end{cases} \quad , \quad Y \geq 0 , \text{Int}$$

تمرین تشویقی : حل مدل فوق
1. $Y \geq 0 , \text{Int}$ — 1 7 16 $y = 44 \div 2$
2. $Y \geq 0$ — 2 7 15 1 - 0

• if: $\max Z = \max\{\ldots , \ldots\} \xrightarrow{\text{How}(?)}$

مدل فرآیند تولید : Production Process Model

شرکت عطرسازی طرشت دو نوع عطر بهار و یاس تولید می‌کند. ماده اولیه مورد نیاز

جهت هر نوع عطر به مبلغ 3 هزار تومان به ازای هر کیلو خریداری می‌شود.

این ماده اولیه سپس به آزمایشگاه ارسال می‌شود بنحوی که به ازای هر کیلوی آن،

1 ساعت کار آزمایشگاهی جهت ادامه فرآیند لازم است که در نهایت از هر کیلوی آن

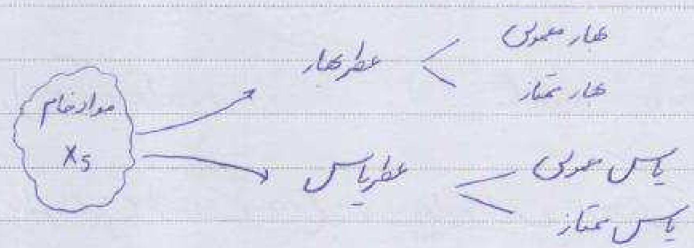
3 گرم عطر بهار معمولی و 4 گرم عطر یاس معمولی تولید می‌شود. هر گرم بهار معمولی

7 هزار تومان و هر گرم یاس معمولی 6 هزار تومان فروخته می‌شود.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

البته با ادامه فرآیند تولید می توان بهار ممتاز و یاس ممتاز را تولید کرد که به ترتیب هر
گرم آنها 18 و 14 هزار تومان قابل فروش است. برای تولید هر گرم بهار
ممتاز باید 3h کار آزمایشگاهی اضافی و 4 هزار تومان هزینه اضافی به ازای هر گرم بهار معمولی
و برای یاس ممتاز (هر گرم) ... 2h + 4 هزار تومان برای هر گرم یاس معمولی
انجام داد. شرکت حداکثر تا 6000h کار آزمایشگاهی و تا 4000 کیلو ماده خام دارد
می خواهیم برنامه تولید شرکت را با هدف حداکثرسازی سود با مدل LP بدست آوریم.



X_5 = مقدار کیلو ماده خام خریداری شده

X_1 = مقدار گرم تولید عطر بهار معمولی
X_2 = — بهار ممتاز
X_3 = — یاس معمولی
X_4 = — یاس ممتاز

Subject:
Year. Month. Date. ( )

X_5 مقدار کیلو ماده اولیه

$3X_5$ گرم عطر بهار

X_1 گرم بهار معمولی

X_2 گرم بهار ممتاز

$4X_5$ گرم عطر یاس

X_3 گرم ~~بهار~~ یاس معمولی

X_4 گرم ~~بهار~~ یاس ممتاز

رابطه ریاضی :

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 3X_5 \\ X_3 + X_4 &= 4X_5 \end{aligned}\right\}$$ روابط تعادلی

$$\text{Max } Z = 7X_1 + (18-4)X_2 + 6X_3 + (14-4)X_4 - 3X_5$$

s.t.

(1) $X_5 \le 4000 \rightarrow 5000\,[?]$

(2) $3X_2 + \quad + 2X_4 + X_5 \le 6000$

(3) $X_1 + X_2 \quad - 3X_5 = 0$

(4) $X_3 + X_4 - 4X_5 = 0$

(5) $X_j \geq 0$, ~~Int~~

جواب : $Z^* = 172,666$ هزارتومان $X_1^* = 11333\frac{1}{3}$ گرم

$X_2^* = 666\frac{2}{3}$ گرم $X_3^* = 16000$ گرم $X_4^* = 0$ گرم

$X_5^* = 4000$ کیلو

برنامه تولید : 4000 کیلو ماده اولیه

→ 12000 گرم بهار: $11333\frac{1}{3}$ معمولی ، $666\frac{2}{3}$ ممتاز

→ 16000 گرم یاس — فقط معمولی

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

در محدودیت ها، هر محدودیتی که ستاری را ارضا کند، تعیین کننده است،

ممکن است تغییر در سمت راست آن جواب بهینه را تغییر دهد

مسئله امتزاج: Blending Problem

شرکت ملی نفت ایران 3 نوع بنزین: I، II، III تولید می کند که از طریق مخلوط کردن

3 نوع نفت خام بدست می آید: نفت نوع 1، 2، 3.

بنزین های تولیدی از نظر نرخ اکتان و میزان گوگرد با هم متفاوت اند:

نوع بنزین	حداقل متوسط نرخ اکتان	حداکثر متوسط درصد گوگرد	تعداد بشکه تقاضا روزانه	قیمت بنزین هر بشکه
بنزین I	10	1	3000	70
بنزین II	8	2	2000	60
بنزین III	6	1	1000	50

	نرخ اکتان	درصد گوگرد	قیمت هر بشکه $
نفت 1	12	0.5	45
نفت 2	6	2	35
نفت 3	8	3	25

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هزینه تبدیل هر بشکه نفت به هر بشکه بنزین به طور ثابت 4$ است. شرکت توانایی

تولید روزانه 14000 بشکه بنزین را دارد و حداکثر 5000 بشکه نفت را می تواند استفاده

از هر کدام

هر دلار بلیت

کند؟ هم چنین مدیریت فروش شرکت ادعا می کند که به ازای تبلیغ هر نوع بنزین

می تواند 10 بشکه تقاضای آن نوع بنزین را زیاد کند. برنامه ریزی تولید شرکت نفت را

با هدف حداکثر سازی سود خالص بدست آورید.

X_{ij} = تعداد بشکه نفت نوع i که به بنزین نوع j تبدیل

تصمیم گیری

تولید

هزینه تبلیغات

a_i = میزان هزینه تبلیغ بنزین نوع i

درآمد:

$$\max Z = 70(X_{11}+X_{21}+X_{31}) + 60(X_{12}+X_{22}+X_{32}) + 50(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

$$- [45(X_{11}+X_{12}+X_{13}) + 35(X_{21}+X_{22}+X_{23}) + 25(X_{31}+X_{32}+X_{33})$$

C_i هزینه تولید انواع نفت

هزینه تبدیل — هزینه تبلیغ

$$+4(X_{11}+X_{12}+\cdots+X_{33}) + a_1 + a_2 + a_3]$$

s.t.

محدودیت ها رابطه تولید و تقاضا

فرض: کلیه تولیدها به مصرف تقاضاها می رسد

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} = 3000 + 10a_1$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32} = 2000 + 10a_2$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33} = 1000 + 10a_3$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت حداکثر میزان تولید بنزین : $X_{11} + X_{12} + \dots + X_{33} \leq 14000$ if: 16000 → زائد

محدودیت میزان شبکه نفت استفاده شده :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 5000$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 5000$$

زائد $X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 5000$

محدودیت حداقل متوسط نرخ اکتان :

هر 3 زائد

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{12X_{11} + 6X_{21} + 8X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \geq 10 \\[2ex] \dfrac{12X_{12} + 6X_{22} + 8X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \geq 8 \end{array}\right.$$

$$\frac{12X_{13} + 6X_{23} + 8X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \geq 6$$

خطی هستند؟
برنامه ریزی ریاضی اند
نه برنامه ریزی خطی
← تبدیل به خطی

حداکثر متوسط درصد گوگرد :

$$\frac{\frac{5}{1000}X_{11} + \frac{2}{100}X_{21} + \frac{3}{100}X_{31}}{X_{11} + X_{21} + X_{31}} \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{\frac{5}{1000}X_{12} + \frac{2}{100}X_{22} + \frac{3}{100}X_{32}}{X_{12} + X_{22} + X_{32}} \leq \frac{2}{100}$$

$$\frac{\frac{5}{1000}X_{13} + \frac{2}{100}X_{23} + \frac{3}{100}X_{33}}{X_{13} + X_{23} + X_{33}} \leq \frac{1}{100}$$

هزینه تشویقی : بود و نبودش در جواب بهینه تاثیر ندارد

محدودیت علامت : $X_{ij} \geq 0$, $\underline{Int}$

$a_i \geq 0$

1. آیا در مدل محدودیت زائد وجود دارد؟

2. Int , no Int : جواب

$X_{11} = 2000$ $X_{12} = 2200$ $X_{13} = 800$ $X_{21} = 1000$

$X_{22} = 4000$ $X_{23} = X_{31} = 0$ $X_{32} = 3300$ ← حل ؟

$X_{33} = 200$ $a_1 = a_3 = 0$ $a_2 = 750$ $Z = 287750$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله کنترل موجودی : (Inventory Control)

در یک شرکت قایق سازی متعلق به دبستان ؟ ، تعدادی قایق را در طول فصل‌ها

سال تولید می نماید . میزان تقاضاهای شرکت در ابتدای هر سال مشخص می شود و در

طی چهار فصل به ترتیب 40 ، 60 ، 75 ، 25 قایق است . شرکت میخواهد کلیه تقاضاها

به موقع ارضا شوند . در طی هر فصل شرکت توانایی تولید حداکثر 40 قایق در وقت معمولی دارد

که این کار موجب می شود هزینه تولید هر قایق در وقت معمولی 400000 تومان باشد

شرکت هم چنین می تواند کارگران را وادار سازد که در وقت اضافه کاری قایق تولید کنند اما

اینکار موجب می شود هزینه تولید هر قایق 450000 تومان شود . در انتهای هر فصل

پس از ارضای تقاضاها قایق‌ها موجود با هزینه 20000 تومان برای فصل بعد نگهداری

می شود . با استفاده از LP مشخص کنید این شرکت در هر فصل چه مقدار قایق تولید کند تا کل

هزینه‌اش حداقل شود ؟ (در ابتدای سال 15 قایق در انبار وجود دارد)

مدل دینامیکی (Dynamic Model) یا مدل چند دوره‌ای (Multiperiod Model)

$\xrightarrow{15}$ فصل 1 $\rightarrow$ فصل 2 $\rightarrow$ فصل 3 $\rightarrow$ فصل 4

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

این دوره‌ها برهم تأثیر گذارند (انبار و ...)

در یک مدل دینامیکی تعیین روابط ریاضی مابین دوره‌ها مهم است.

موجودی در انتهای فصل t = مقدار تولید در فصل t − تقاضای فصل t + موجودی در انتهای فصل $t-1$

عادی اضافه کاری

X_t : مقدار تولید تایر عادی در فصل t Y_t = اضافه کاری

i_t : تعداد تایر که در فصل t به انبار می‌رود

$$\longrightarrow \quad i_t = (X_t + Y_t) - \overbrace{d_t}^{\text{عدد ثابت}} + i_{t-1}$$

$$Min \quad Z = 4000000(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 4500000(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$$

$$+ \; 200000(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)$$

s.t. محدودیت‌های تعادل :

$$i_1 = (X_1 + Y_1) + 10 - 40$$
$$i_2 = (X_2 + Y_2) + i_1 - 60$$
$$i_3 = (X_3 + Y_3) + i_2 - 75$$
$$i_4 = (X_4 + Y_4) + i_3 - 25$$

محدودیت‌های نامنفی بودن : $i_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3, 4$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت تولید در وقت عادی : $X_t \leq 40$ $\quad t = 1, 2, 3, 4$

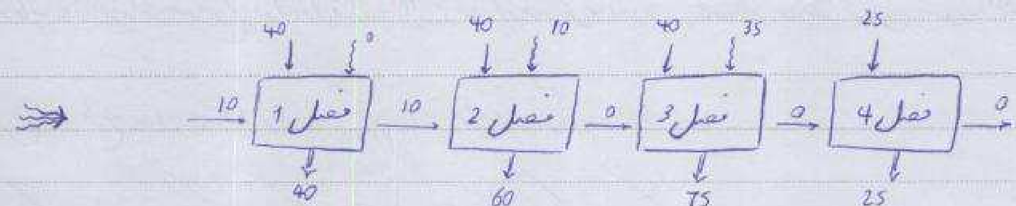
حداکثر

محدودیت علامت : $X_t, i_t, Y_t \geq 0$, Int

جواب : $X_1^* = X_2^* = X_3^* = 40 , X_4^* = 25$

$Y_1^* = Y_4^* = 0 , Y_2^* = 10 , Y_3^* = 35$

$i_2^* = i_3^* = i_4^* = 0 , i_1^* = 10$, $Z^* = 784\,500\,000$



می‌خواهیم تا زمانی که تولید در وقت عادی به 40 نرسیده ، اضافه تولید نداشته باشیم :

$X_t < 40 \Rightarrow Y_t = 0$ $\qquad \cancel{X_t < 40 , Y_t > 0}$

اینجا به دلیل وجود تابع هدف که ضریب Y ها بزرگتر از ضریب X ها است ← خود تابع هدف

X را max کرده و بعد سراغ Y می‌رود

اگر تابع هدف نباشد ؟؟ ← محدودیت‌ها ؟ ← تشویقی

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مدل سازی مسائل با استفاده از متغیرهای صفر و یک :

مسئله بودجه بندی سرمایه : Capital budgeting problem

یک شرکت 5 طرح مختلف جهت سرمایه گذاری به نام طرح ها I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 و I_5 بررسی می کند. مقدار سرمایه شرکت در حال حاضر (سال 0) 40 میلیون تومان و در سال 1 مقدار 20 میلیون تومان است و پیش بینی سود خالص ناشی از هر سرمایه گذاری به همراه سرمایه مورد نیاز هر طرح در ابتدا و در سال بعد در جدول آمده. جهت max کردن سود خالص فعلی چه طرح هایی را انتخاب کنیم تا شرایط زیر برآورده شود :

I) اگر در I_2 سرمایه گذاری کند باید در I_1 هم سرمایه گذاری کند .

II) شرکت می تواند همزمان در I_2 و I_4 سرمایه گذاری کند .

III) شرکت حداکثر در 3 طرح می تواند سرمایه گذاری کند .

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
سرمایه مورد نیاز در حال حاضر	11	14	15	5	29
سرمایه مورد نیاز در سال 1	3	6	5	8	14
سود حاصل فعلی هر طرح (NPV)	13	17	14	8	20

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با استفاده از روابط اقتصاد مهندسی، همه ارزش ها را به سال ۰ می بریم.

* در مسائلی که باید در مورد انتخاب یا عدم انتخاب یک طرح، گزینه، تصمیم گیری نمائیم از

متغیر صفر و یک (zero-one variable) استفاده می کنیم $X_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

(متغیری گسسته است) طرح I_j انتخاب شود

$$\text{Max } Z = 13X_1 + 17X_2 + 14X_3 + 8X_4 + 20X_5$$

s.t.

محدودیت ① $11X_1 + 14X_2 + 15X_3 + 5X_4 + 29X_5 \leq 40$

سرمایه گذاری ② $3X_1 + 6X_2 + 5X_3 + 8X_4 + 14X_5 \leq 20$

* اگر در طرح I_2 سرمایه گذاری باید در I_1 هم: $X_2 = 1 \rightarrow X_1 = 1$

$X_1 \,\square\, X_2$? $\quad = \quad \leq \quad \geq$ ✓

if $X_2 = 1 \rightarrow X_1 = 1$

if $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 0, 1$

$\rightarrow$ ③ $X_2 \leq X_1$

* شرکت نمی تواند در I_2 و I_4 همزمان سرمایه گذاری کند:

④ $X_2 + X_4 \leq 1$

* حداکثر در 3 طرح: ⑤ $X_1 + \dots + X_5 \leq 3$

⑥ $X_j = (0, 1)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین تشویقی : 1. حل کنید با lingo

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$

$x_4 = x_5 = 0$

2. حل مدل با محدودیت ها جدید :

$x_2 \leq x_1 + x_3$

سرمایه گذاری در I_2 منوط به اینکه در I_1 یا I_3 سرمایه گذاری کرده باشیم (جایگزین 4)

=> جایگزین جواب

وقتی هم I_2 و I_4 انتخاب شود، دیگر طرح I_3 انتخاب نشود (۵)
(همزمان)

$x_2 + x_4 + x_3 \leq 2$

* این مدل برنامه ریزی خطی نیست . خطی پیوسته است اما این مدل گسسته است .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Knapsack Problem — مسئله کوله پشتی :

هنگام صعود به کوه جهت تجدید اعصاب، کوله پشتی شما توانایی حمل حداکثر 14 kg بار را دارد. با توجه به محدودیت وزن کوله، می خواهید از این 8 قلم جنس که برای صعود نیاز دارید، اقلام ارزشمندتر را انتخاب نمائید. برای این منظور به هر قلم جنس یک ارزش عددی را در مقیاس [0-20] طبق جدول، اختصاص می دهید، با برنامه ریزی مشخص کنید چه اقلامی بیاورید؟

شماره	1	2	3	4	5	6	7	8
وزن (kg)	5	4	3	6	7	9	8	2
ارزش عددی	17	16	20	18	14	19	15	12

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{جنس را انتخاب} \\ 0 & \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 17X_1 + 16X_2 + 20X_3 + 18X_4 + 14X_5 + 19X_6 + 15X_7 + 12X_8$$

s.t.

$$① \quad 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 + 7X_5 + 9X_6 + 8X_7 + 2X_8 \leq 14$$

$$X_j = (0, 1)$$

* مسئله کوله پشتی یک مسئله ی تک محدودیتی است ⇐ جواب موجه را به راحتی پیدا می کنیم

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* مسئله بهینه سازی ترکیبی (COP) Combinatorial Optimization Problem،

مسئله‌ای است که در آن تعداد جواب های موجه خیلی زیاد یا بی‌نهایت است و یافتن

جواب بهینه به دلیل گستردگی فضای موجه کار ساده‌ای نیست.

• مثلاً در این مسئله در کل 2^8 جواب وجود دارد (۰ یا ۱) می توانیم همه را امتحان کنیم تا

جواب های موجه به دست آید. (اما با زیاد شدن تعداد متغیرها خیلی سخت می شود)

2^n

ارزش هر kg از هر جنس:

3.4   4   6.6   3   2   2.1   1.8   6

$X_3 = 1$ (هر kg ارزش بیشتر) $\longrightarrow$ ظرفیت وزن باقیمانده: $14-3=11$

$X_8 = 1$ $11-2=9$ باقی

$X_2 = 1$ $9-4=5$

$X_1 = 1$ $5-5=0$ $\Longrightarrow (1,1,1,0,0,0,0,1)$

$z = 65$

تمرین تشویقی: آیا جواب به دست آمده از روش فوق برای مسئله کوله پشتی به عنوان جواب

بهینه است یا نه

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای حل مسائل COP در دهه‌های اخیر روش‌های متعددی موسوم به «روش‌های متاهیوریستیک» (Metaheuristic) توسعه پیدا کرده که این روش‌ها جواب‌هایی را تولید می‌کنند که هم موجه‌اند و هم بسیار نزدیک به نقطه بهینه (حتی ممکن است نقاطی بهینه نیز باشند) و هم بسیار سریع‌اند. از جمله روش‌های ... می‌توان به الگوریتم ژنتیک GA = (Genetic Algorithm) ، الگوریتم کلونی مورچگان ACO = (Ant Colony Optimazation) ، الگوریتم جستجوی ممنوع TS = (Tabu Search)

* علم ژنتیک به مطالعه قوانین توارث در موجودات زنده می‌پردازد. بر مبنای این قوانین از ترکیب کروموزوم‌های پدر و مادر که خود از ژن‌های مختلفی تشکیل شده است، کروموزوم فرزند به وجود می‌آید که برخی از ژن‌های آن مشابه پدر یا مادر است.

در مسئله کوله:

45 $X_1^{(1)} = (1,1,0,0,0,0,0,0,1)$

27 $X_2^{(1)} = (0,0,0,0,0,0,0,1,1)$

$X_3 = (0,0,1,1,0,0,0,0,0)$ 38

$X_4 = (0,0,0,1,1,1,0,0,0)$ غیرموجه

(روش مبادله)

جواب‌های جدید که ممکن است موجه نباشند

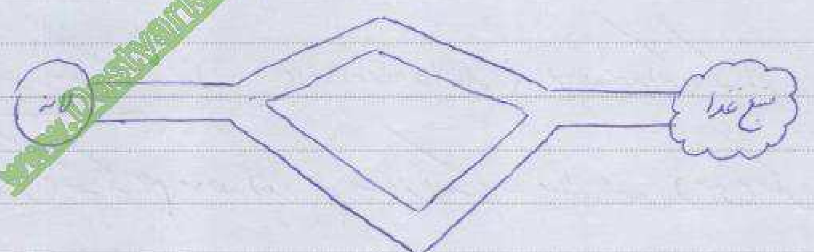
تمرین تشویقی: طراحی و اجرای یک الگوریتم GA برای حل مسئله کوله

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date.

ACO



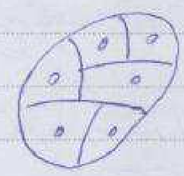
مورچه‌ها وقتی از لانه خارج می‌شوند دسته‌ای از راه کوتاه و دسته‌ای از راه طولانی می‌روند. تعدادی که از راه کوتاه‌تر رفته‌اند زودتر باز می‌گردند و از مورچه‌های بعدی به علت تراکم ماده‌های ترشح شده. تعداد زیادی، مسیر کوتاه را برمی‌گزینند و به تدریج تعداد مورچه‌های راه کوتاه زیاد می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date.

مسئله پوشش مجموعه : Set Covering Problem

سازمان آتش نشانی استان تهران طرح احداث ایستگاه های آتش نشانی را در 6 منطقه شهری در دست بررسی دارد. در جدول زیر فواصل مراکز این مناطق نسبت به هم داده شده. سازمان می خواهد یا در هر مرکز، ایستگاه باشد و یا در فاصله حداکثر 15 آن ایستگاه موجود باشد و در ضمن، کل تعداد ایستگاه های تاسیس شده، حداقل شود. مدل برنامه ریزی برای رسیدن به این هدف؟

	2	3	4	5	6
منطقه 1	10	20	30	30	20
منطقه 2		25	35	20	10
3			15	30	20
4				15	25
5					14



$$x_j = \begin{cases} 1 & \leftarrow \text{اگر ایستگاه در مرکز منطقه } j \text{ احداث شود} \\ 0 & \end{cases}$$

$\min Z = X_1 + \dots + X_6$
st.

(1) $X_1 + X_2 \geq 1$ یا در خود 1 باید باشد یا در فاصله کمتر از 15 آن

(2) $X_1 + X_2 + X_6 \geq$

(3) $X_3 + X_4 \geq 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(4) $X_3 + X_4 + X_5 \geq 1$

(5) $X_4 + X_5 + X_6 \geq 1$

(6) $X_2 + X_5 + X_6 \geq 1$

(7) $X_j = (0,1)$

* اگر یک X ی بود که با ۱ بودن همه شرط‌ها را ارضا کند جواب ۱ می‌شد اما وجود ندارد

* دوتا وجود دارد؟

حل: X_4 و X_2 $\Leftarrow$ $X_1^* = X_3^* = X_5^* = X_6^* = 0$ $X_2^* = X_4^* = 1$ $Z^* = 2$

تمرین تشویقی: یک مقاله یا تحقیق کاربردی در زمینه این مسئله با ذکر ماخذ مطالعه؟

مسئله هزینه ثابت: Fixed charge Problem

در یک کارگاه برای راه اندازی ماشین آلات نیاز به یک هزینه ثابت است که مستقل از مقدار محصولات تولیدی با ماشین آلات مورد نظر است و هزینه راه اندازی نامیده می‌شود. بنابراین تولید هر محصول از دو بخش هزینه‌ای تشکیل می‌شود. هزینه ثابت (۱) و هزینه متغیر که بستگی به مقدار محصول تولیدی دارد.

در جدول، هزینه ثابت (k_j) و هزینه متغیر (c_j) وابسته به هر واحد از ۳ نوع محصولی که در کارگاه ساخته می‌شود به همراه میزان ماده اولیه و ساعت کار مورد نیاز داده شده، کارخانه حداکثر 160 ماده اولیه و حداقل 150 ساعت کار دارد. حداقل ساز کل هزینه؟

Subject.
Year. Month. Date. ( )

	ماده اولیه	ساعت کار	k_j	c_j
محصول 1	4	3	200	6
2	3	2	150	4
3	4	6	100	8

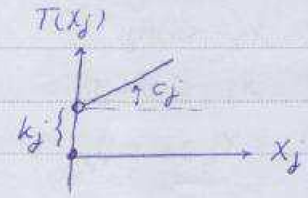
در این مسئله برای یک محصول مورد نیاز مثلاً محصول j متغیر تصمیم گیری :

$x_j =$ تعداد محصول نوع j

هزینه تولید x_j واحد $\quad T(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$

$$\text{Min } z = \sum_j T(x_j)$$

s.t.



① $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 150$

② $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$

در این مسئله تولید یا عدم تولید به دلیل تابع هدف یک متغیر هم است ← متغیر وابسته y_j

تعریف :

$y_j = \begin{cases} 1 & \text{از محصول j تولید داشته باشیم} \\ 0 & \text{— نداشته —} \end{cases}$

می خواهیم : $x_j > 0 \Rightarrow y_j = 1 \qquad x_j = 0 \rightarrow y_j = 0$

جهت تبدیل روابط ۲ به محدودیت ، داریم :

if: $x_j \leq y_j \rightarrow \times \rightarrow$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x_j \le My_j$

M = یک عدد بسیار بزرگ مثبت

$x_j > 0 \Rightarrow$ عدد مثبت $\le My_j \xrightarrow{(0,1)} y_j = 1$ ← هدف : $c_jx_j + k_j$

$x_j = 0 \Rightarrow 0 \le My_j \Rightarrow \begin{cases} y_j = 1 \to k_j \\ y_j = 0 \to 0 \end{cases}$ ⟵ تابع هدف درست می‌شه

چون min است

⟹ تابع هدف : $\text{Min } Z = (6x_1 + 200y_1) + (4x_2 + 150y_2) + (8x_3 + 100y_3)$

s.t.

(3) $x_1 \le My_1$

(4) $x_2 \le My_2$ ← Mها را باید تعیین کنیم

(5) $x_3 \le My_3$ مثلاً 60 ...

(6) $x_i \ge 0 \ , \ y_j = (0,1)$

تمرین تشویقی : به ازای مقادیر مختلف M حل ؟ کمترین M ؟

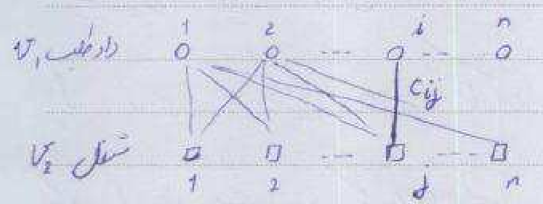
$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0 \quad y_3 = 1 \quad x_3 = 25 \quad Z = 300$

Min برای M : 25

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله تخصیص (کارگماری) : Assignment Problem

در یک سازمان، n شغل موجود است. جهت تصدی این n شغل، n داوطلب مراجعه می کنند که هر یک توانایی انجام هر یک از مشاغل مذکور را دارند. می خواهیم به هر داوطلب یک شغل و به هر شغل یک داوطلب، به نوعی تخصیص یابد. اگر هزینه تخصیص شغل داوطلب i به شغل j را c_{ij} بنامیم، تخصیص داوطلبان به مشاغل چگونه باشد تا کل هزینه تخصیص حداقل شود؟



هر یال در گراف فوق بین یکی از اعضای V_1 و یکی از اعضای V_2 است و بین هیچ یک از اعضای V_1 (یا V_2) به تنهایی یال نداریم ← گراف دوبخشی

+ اینجا تمام یال‌های ممکن با این دو مجموعه V_1 و V_2 موجود است ← گراف دوبخشی کامل

+ به هر یال هزینه (وزن) c_{ij} اختصاص می یابد ← گراف دوبخشی کامل وزن دار

تعداد جواب‌های موجه : $n!$

متغیر تصمیم گیری : $x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{داوطلب i به شغل j اختصاص} \\ 0 & \end{cases}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$$\text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

① $\sum_j x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$, ② $\sum_i x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ ← هرکدام n تا محدودیت

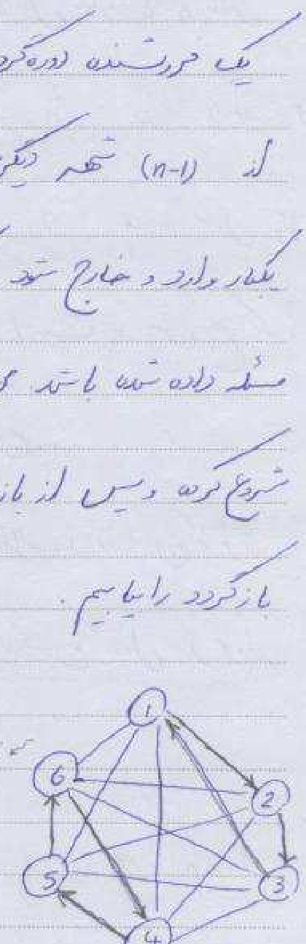
③ $x_{ij} = (0, 1)$

مسئله فروشنده دوره گرد : Traveling Salesman Problem (TSP)

یک فروشنده دوره گردی می خواهد از شهر خودش (شهر 1) شروع کرده و پس از بازدید از $(n-1)$ شهر دیگر به شهر مبدأ بازگردد. او می خواهد در هریک از شهرهای مذکور فقط یکبار وارد و خارج شود. اگر فاصله شهر i تا شهر j را d_{ij} فرض کنیم که جزء اطلاعات مسئله داده شده باشد می خواهیم تور با کمترین مسافت را که در آن فروشنده از شهر خودش شروع کرده و پس از بازدید از تمام $(n-1)$ شهر دیگر به شهر مبدأ با توجه به شرایط گفته شده بازگردد را بیابیم.

d_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	x	10	21			
2		x				
3			x			
4				x		
5					x	
6						x

نمونه ای از تور



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

✓ جواب های موجه زیادی وجود دارند. در یک مسئله با n شهر می توان $(n-1)!$
جواب جهت بازدید از تمام شهرها داشت ← مسئله از نوع COP است.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{از شهر } i \text{ به شهر } j \text{ برود} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\min Z = \sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij}$$

s.t

I $\sum_i X_{ij} = 1$ (به هر شهر یکبار وارد) $j = 1, 2, 3, \dots, n$

II $\sum_j X_{ij} = 1$ (از هر شهر یکبار خارج) $i = 1, 2, 3, \dots, n$

؟ آیا با این محدودیت ها به جواب بهینه می رسد؟

با احتمال کم می توان رسید و آن وقتی است که محدودیت های بعدی زاید باشند

می خواهیم جواب هایی مثل جواب زیر صدق نکنند:

$X_{12} = X_{23} = X_{31} = 1$
$X_{64} = X_{45} = X_{56} = 1$

* اگر جوابی در مسئله TSP داشته باشیم که در دسته محدودیت های I و II صدق کند
اما شکل یک تور کامل را ندهد (قبل از بازدید از $(n-1)$ شهر به شهر ۱ بازگردد).
به آن زیر تور (Sub tour) گویند.

برای مدل سازی مسئله TSP نیازمند محدودیت هایی هستیم که مانع ایجاد زیر تور شود که برآنها

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیت حذف زیرتور (Subtour Elimination Constraint) گویند.

زیرتور شهرها را به حداقل 2 مجموعه تقسیم می کند. قسمتی که 1 را شامل می شود Q

و بقیه را $\bar{Q}$ می نامیم. اگر حداقل 1 یال بین Q و $\bar{Q}$ ها باشد مشکل حل می شود:

V کل شهرها : $Q+\bar{Q}=V$

(3) $\sum_{i\in Q}\sum_{j\in \bar{Q}} X_{ij} \geq 1$ → تعداد : 2^n-2 ← ∅ و V نمی شود

زیاد!

تمرین تشویقی: روش های نوشتن حذف زیرتور +

بکارگیری آن در یک مدل TSP با هفت شهر → مرجع 2

+ با توجه به محدودیت های 1 و 2 می توان تعدادی را هم حذف کرد اما وقتی n بزرگ است

و 2^n نمایی است چندان تاثیری ندارد.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Either-Or Constraint : فعال / غیرفعال شدن یک محدودیت از بین دو محدودیت

گاهی اوقات در مدل سازی می خواهیم محدودیت های داشته باشیم که در آن از بین دو محدودیت I و II در هر زمان یکی به صورت محدودیت فعال و دیگری به صورت محدودیت زائد درآید :

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 & \text{I} \\ g(x_1, \dots, x_n) \leq b_2 & \text{II} \end{cases}$$

برای این منظور از متغیر 0 و 1 y کمک می گیریم : $y = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 + My & \text{I} \\ g(x_1, \dots, x_n) \leq b_2 + M(1-y) & \text{II} \end{cases}$$

$y = 1 \Rightarrow$ II فعال، I زائد

$y = 0 \Rightarrow$ I فعال، II زائد

$f_1 \leq b_1 + My_1$

$\vdots$

$f_t \leq b_t + My_t$

$y_1 + \dots + y_t = t - k$ ؟؟ اگر بخواهیم k تا از t فعال شود

فرم های استاندارد و کانونی مسئله LP :

تعریف : در فرم کانونی (Canonical Form) مسئله برنامه ریزی خطی 3 شرط زیر باید برقرار :

1. تمام متغیرها مسئله غیرمنفی هستند.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2. تمام محدودیت ها به صورت $\leq$ هستند

3. تابع هدف به صورت max است.

* هر مسئله LP را می توان به صورت فرم کانونی نوشت.

✓ به صورت کانونی؟

$$\min\ Z = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

s.t.

① $X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 4$

② $2X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 5$

③ $X_2 - 5X_3 = 4$

④ $|3X_1 + 5X_2 - 6X_3| \leq 6$

⑤ $X_1, X_2 \geq 0$, X_3 urs $\rightsquigarrow$ unrestricted In Sign

هر عدد را می توان به صورت تفاضل دو عدد مثبت نوشت:

$X_3 \to X_3^+ - X_3^-$

$X_3^+, X_3^- \geq 0$

$\Rightarrow$ ⑤ $\rightsquigarrow$ $X_1, X_2, X_3^+, X_3^- \geq 0$ همه جا به جای X_3 ، $X_3^+ - X_3^-$ می گذاریم

تابع هدف $\xrightarrow{\times(-)}$ $\max\ Z = -3X_1 - 4X_2 - 5(X_3^+ - X_3^-)$

① $\rightsquigarrow$ $X_1 + 2X_2 + 3(X_3^+ - X_3^-) \leq 4$

② $\rightsquigarrow \times(-) \rightsquigarrow$ $-2X_1 - 3X_2 + (X_3^+ - X_3^-) \leq -5$

③ $\longrightarrow$ $X_2 - 5(X_3^+ - X_3^-) \leq 4$

$\searrow$ $-X_2 + 5(X_3^+ - X_3^-) \leq -4$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(4) $\rightsquigarrow$ ---- $3X_1+5X_2-6(X_3^+-X_3^-)\leq 6$

$-3X_1-5X_2+6(X_3^+-X_3^-)\leq 6$

اگر $|\ldots|\geq 6 \Rightarrow$ $\ldots\geq 6$ یا $\ldots\geq 6$ $\longrightarrow$ y - {

در فرم استاندارد برنامه ریزی خطی : باید 3 شرط زیر برقرار باشند :

1. تمام متغیرهای مسئله غیرمنفی هستند .

2. تمام محدودیت های مسئله (به جز محدودیت علامت) بصورت تساوی اند .

3. تمام مقادیر سمت راست محدودیت ها غیرمنفی اند ($\forall i: b_i\geq 0$)

* هر مسئله LP به فرم استاندارد قابل تبدیل است .

اگر در یک مسئله محدودیتی به صورت $a_1X_1+\cdots+a_nX_n\leq b$ وجود داشت شرط دوم چگونه برقرار می شود ؟

برای تبدیل محدودیت فوق به صورت تساوی از متغیری به نام متغیر کمکی (Slack Variable) استفاده می شود . به این ترتیب که : $a_1X_1+\cdots+a_nX_n+S=b$

S متغیر است چون معلوم نیست مقدارش چند است

$S=b-(a_1X_1+\cdots+a_nX_n) \qquad S\geq 0$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر محدودیتی بصورت $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b$ وجود داشته باشد شرط دوم چگونه برقرار ؟

$\rightarrow -a_1x_1 - \dots - a_nx_n \leq -b \rightarrow$

$-a_1x_1 - \dots - a_nx_n + S = -b$ $\cancel{\checkmark}$

چون معمولاً مقادیر سمت راست b در مسئله اولیه غیرمنفی است با توجه به شرط سوم نمی توان از روش فوق استفاده کرد.

برای تبدیل نامساوی فوق به حالت تساوی از متغیری به نام متغیر مازاد (Surplus Variable) استفاده می شود. بدین ترتیب که:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n - E = b$$

$$E = (a_1x_1 + \dots + a_nx_n) - b \rightarrow E \geq 0$$

مثال: فرم استاندارد؟

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2$$

s.t.

(1) $x_1 \leq 100$ (2) $x_2 \leq 100$

(3) $50x_1 + 35x_2 \leq 4000$

(4) $20x_1 + 15x_2 \geq 2000$

(5) $x_1, x_2 \geq 0$

شرط 1 برقرار است.

(1) $\rightarrow x_1 + S_1 = 100$

(2) $\rightarrow x_2 + S_2 = 100$

(3) $\rightarrow 50X_1 + 35X_2 + S_3 = 4000$

(4) $\rightarrow 20X_1 + 15X_2 - E_1 = 2000$

(5) $X_1, X_2 \geq 0$ ، $S_1, S_2, S_3, E_1 \geq 0$

1 و 2 و 3 و 4 تشکیل یک دستگاه معادلات می دهند:

متغیرها: 6 تا   تعداد معادلات: 4 $\Rightarrow$ این دستگاه بی شمار جواب دارد.

$\Rightarrow$ جواب هایی که همه + نیستند حذف می کنیم. حل در رسیدن به یک جواب ؟

ترکیب محدب (Convex Cambinaton) از دو نقطه X_1 و X_2 عبارتست از:

یک نقطه نظیر X بطوریکه: $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$

$0 \leq \lambda \leq 1$

$\Rightarrow$ از لحاظ هندسی، ترکیب محدب دو نقطه مجموعه تمام نقاط پاره خطی که این دو نقطه را بهم متصل می کند است.

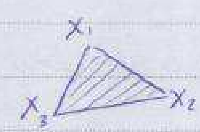
$\rightarrow$ ترکیب محدب 3 نقطه:

$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

$0 \leq \lambda_i \leq 1$

هندسی: نقاط رو و توی مثلث:



* ترکیب محدب n نقطه :

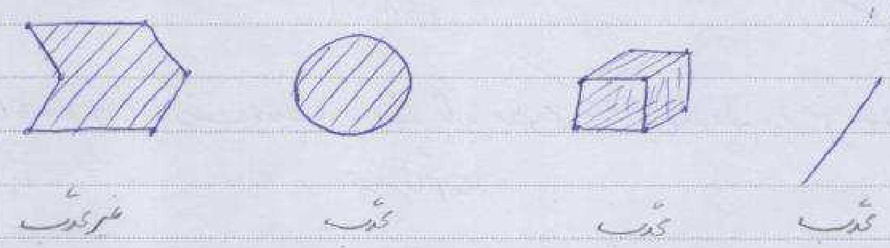
$$X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$
$$\sum \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i \geq 0$$

مجموعه محدب : مجموعه S مجموعه محدب (Convex Set) گفته می‌شود اگر به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه $X_1 , X_2 \in S$ داشته باشیم :

$$\forall \; X_1 , X_2 \in S : \left\{ \begin{array}{l} \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array} \right. \in S$$

هندسی : پاره‌خطی که هر دو نقطه از مجموعه را به هم وصل می‌کند داخل مجموعه .

مثال :

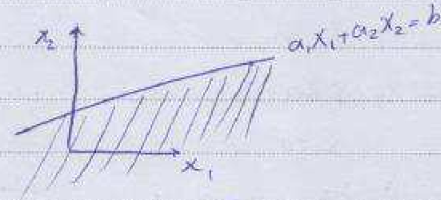


در یک مجموعه محدب S ، نقطه X را نقطه گوشه (Extreme Point) گوییم اگر نتوان آن را به صورت ترکیب محدب دو نقطه متمایز S نوشت .

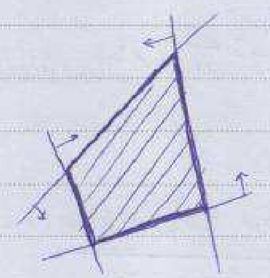
* هر نقطه‌ی غیر گوشه در یک مجموعه محدب را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه متمایز نوشت .

* به هر نامعادله به صورت $a_1x_1+\cdots+a_nx_n \le b$ یک نیم‌فضا (Half Space) گوییم. چون مجموعه تمام نقاط فضا را به دو زیرمجموعه تقسیم می‌کند.

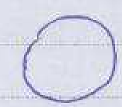
$a_1x_1+a_2x_2 \le b$



در مسئله‌های LP، ناحیه تشکیل از محدودیت‌ها در واقع ناحیه‌ای است که از اشتراک مابین تعدادی محدود نیم‌فضا تشکیل می‌شود.



اگر محل تقاطع تعداد محدودی نیم‌فضا تشکیل یک مجموعه محدب را دهد به آن چندوجهی محدب (Convex Polyhedron) گویند.

*  مجموعه محدب است اما چندوجهی محدب نیست.

* مکعب چندوجهی محدب است که از ۶ عدد نیم‌فضاها (که شامل وجه‌های مکعب‌اند)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل ترسیمی مسائل برنامه ریزی خطی با دو متغیر اصلی:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

s.t.

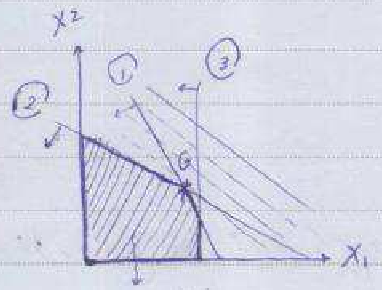
(1) $2X_1 + X_2 \leq 100$

(2) $X_1 + X_2 \leq 80$

(3) $X_1 \leq 40$

(4) $X_1, X_2 \geq 0$ $\longrightarrow G(20,60)$

هنگامی که دو متغیر اصلی نظیر X_1، X_2 در مسئله وجود داشته باشند می توان نیم فضاهای مربوط به محدودیت ها را در فضای دو بعدی ترسیم کرد:



که: ناحیه موجه

تعریف: فضای / ناحیه موجه (Feasible Space / region)

در یک مسئله LP عبارت از مجموعه تمام نقاطی که در همه محدودیت های مسئله (اصلی + علامت) صدق کند.

هر نقطه متعلق به فضای موجه در واقع یک نقطه (جواب) موجه است: Feasible Solution

* هر جواب موجه مسئله LP که بهترین مقدار تابع هدف را تولید کند جواب بهینه (Optimal Solution) نامیده می شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای $Z=400$ خط $3X_1+2X_2$ را رسم و ...

* در یک مسئله LP با تابع هدف max (min) به خطوط موازی هم که به ازای تخصیص مقادیر مختلف به تابع هدف به دست می آید خطوط هم سود (خطوط هم هزینه) گویند.

Iso-cost Lines   Iso-profit Lines

برای یافتن جواب بهینه مسئله LP در حالت ترسیمی، می توان خطوط هم سود را به نحوی رسم کرد که بیشترین مقدار Z را از بین نقاط موجه مسئله LP مشخص کند.

قضیه: ناحیه موجه S به صورت $S=\{X \mid AX \leq b,\ X \geq 0\}$ تشکیل یک مجموعه محدب را می دهد.

محدب، کانوکس

اثبات: فرض کنید دو نقطه X_1 و X_2 متعلق به مجموعه S وجود دارند، در اینصورت

$$X_1 \in S \Rightarrow \begin{cases} AX_1 \leq b \\ X_1 \geq 0 \end{cases} \qquad X_2 \in S \Rightarrow \begin{cases} AX_2 \leq b \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\times \lambda \downarrow \qquad\qquad \times (1-\lambda) \downarrow$$

$$\begin{cases} A\lambda X_1 \leq \lambda b \\ \lambda X_1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(1-\lambda)X_2 \leq b(1-\lambda) \\ (1-\lambda)X_2 \geq 0 \end{cases}$$

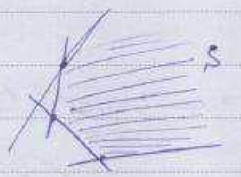
$$\xRightarrow{+} \begin{cases} A[\lambda X_1+(1-\lambda)X_2] \leq \lambda b+(1-\lambda)b \\ \lambda X_1+(1-\lambda)X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A[\overbrace{\lambda X_1+(1-\lambda)X_2}^{X}] \leq b \\ \underbrace{\lambda X_1+(1-\lambda)X_2}_{X} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \in S \Rightarrow \lambda X_1+(1-\lambda)X_2 \in S \rightarrow$$ محدب

* - یک چندوجهی محدب محدود گویند اگر از یک نقطهٔ دلخواه موجود در درون فضای موجه مربوط به آن در هر سمتی حرکت کنیم یک نیم فضا وجود دارد که مانع پیشروی ما خواهد شد.

در واقع یک نیم فضای محدود کننده در هر سمتی از چندوجهی وجود دارد.

* چندوجهی محدب نامحدود:



اینجا نقاط گوشه می توانند معنی از کران را بدهند

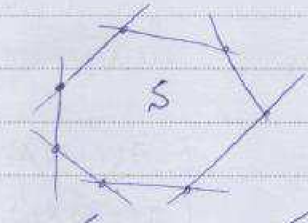
* در یک چندوجهی محدب محدود، هر نقطه غیرگوشه را می توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشهٔ چندوجهی محدب نوشت.

قضیه: در یک مسئله LP به صورت زیر اگر فضای S محدود باشد، در اینصورت جواب بهینه در صورت وجود در حداقل یکی از گوشه ها اتفاق می افتد.

LP: $\max z = cx$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$



اثبات: از قضایای گفته شده قبلی می دانیم که فضای S یک چندوجهی محدب است و با توجه به شرایط مسئله، محدود است. فرض کنید که مجموعه نقاط گوشه S به صورت زیر:

Subject:
Year. Month. Date.

فرض کنید جواب بهینه $\{$نیم نقاط‌ها محدودند$\}$ ← $P = \{X_1^*, \dots, X_t^*\}$

مسئله LP ، Y^* باشد. اگر $Y^* \in P$ ، قضیه اثبات شده. پس فرض کنید $Y^* \notin P$

⇐ می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه عضو P نوشت:

$$Y^* = \sum \lambda_i X_i^*$$

$$\sum \lambda_i = 1 \qquad Z^* = CY^* \implies Z^* = C \sum \lambda_i X_i^*$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \implies Z^* = \sum_i C \lambda_i X_i^* \quad (\mathrm{I})$$

حال از بین t نقطه گوشه فرض کنید که نقطه X_p^* بهترین تابع هدف را تولید می‌کند:

$$\max_{i \in P} [CX_i^*] = CX_p^* \implies CX_i^* < CX_p^* \quad i = 1, \dots, t \;,\; i \neq p$$

$i = p \to CX_p^* = CX_p^*$ ⇐ چون می‌شود ادعا کرد یکی کامل است)

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \xrightarrow[\text{می‌شه}]{\text{ضرب طرفین}} \underline{\sum C \lambda_i X_i^*} < \sum C \lambda_i X_p^* \xrightarrow{\mathrm{I}} Z_{Y^*}^* < \sum C \lambda_i X_p^*$$

$$\implies Z_{Y^*}^* < CX_p^* \underbrace{\sum \lambda_i}_{1} \implies Z_{Y^*}^* < CX_p^* \implies Z_{Y^*}^* < Z_{X_p^*}^*$$

← تناقض با اینکه Y^* بهینه است.

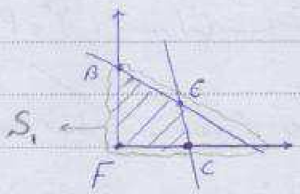
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین نقاط گوشه فضای موجه به صورت جبری :

Max $z = 4x_1 + 3x_2$
s.t.

① $x_1 + x_2 \le 40$
② $2x_1 + x_2 \le 60$
③ $x_1 , x_2 \ge 0$



↓ استاندارد

① $x_1 + x_2 + S_1 = 40$
② $2x_1 + x_2 + S_2 = 60$
③ $x_1 , x_2 , S_1 , S_2 \ge 0$

* هر جوابی که از طریق حل دستگاه معادلات مربوط به فرم استاندارد با توجه به غیر منفی بودن متغیرها بدست می آید در حقیقت یک نقطه موجه از فضای S است. پس نقطه گوشه فضای S نیز که در واقع یک نقطه موجه است باید به طریق از روی جوابهای مربوط به حل دستگاه معادلات ناشی حاصل شود.

تعریف: در سیستم معادلات $AX = b$ که فرض می شود دارای m معادله و n متغیر ($m < n$) یک جواب پایه (Basic Solution) بدین صورت بدست می آید که مقدار $n-m$ متغیر را مساوی صفر فرض کرده و دستگاه m معادله و m متغیر حاصل را به شرط داشتن جواب حل می کند.

دترمینال ماتریس ضرایب $\neq 0$ ← ستونهای وابسته به m متغیر مستقل خطی باشند

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مثال قبل :

$n = 4$

$m = 2$ ← 2 تا را ۰ قرار می‌دهیم :

$S_1 = S_2 = 0 \Rightarrow$ $x_1 + x_2 = 40$ ، $2x_1 + x_2 = 60$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \text{مستقل}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 20$ ← $(20, 20, 0, 0)$: معادل نقطه E در فضا ما هست

تعریف : به m متغیر موجود در یک جواب پایه‌ای که از حل دستگاه معادلات m متغیر و m معادله بدست می‌آید متغیرهای پایه‌ای (Basic Variables) و به (n-m) متغیری که صفر فرض شده‌اند متغیرهای غیر پایه‌ای (NonBasic Variables) گفته می‌شود. مجموعه متغیرهای پایه‌ای را با X_B و مجموعه متغیرهای غیر پایه‌ای را با X_N نشان می‌دهیم.

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad X_N = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

به ماتریس $m \times m$ که به وسیله ضرایب متغیرهای پایه‌ای بدست می‌آید ماتریس پایه‌ای (Basic Matrix) گویند : B . به ماتریسی که به وسیله متغیرهای غیر پایه‌ای بدست می‌آید ماتریس غیر پایه‌ای (Nonbasic Matrix) گویند : N ، $(m \times (n-m))$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

X_B	X_N	(X_1, X_2, S_1, S_2)	نقطه گوشه
X_1, X_2	S_1, S_2	$(20, 20, 0, 0)$	E ✓
S_1, S_2	X_1, X_2	$(0, 0, 40, 60)$	F ✓
X_2, S_1	X_1, S_2	$(0, 60, -20, 0)$	D ×

تعریف: در یک جواب پایه‌ای حاصل از حل دستگاه معادلات هنگامی که کلیه متغیرها غیرمنفی باشند به آن جواب پایه‌ای موجه (Basic Feasible Solution) یا به اختصار BFS گویند. که در محدودیت علامت صدق کند

* هر BFS وابسته به یک نقطه گوشه فضای موجه است و بالعکس.

X_2, S_2	X_1, S_1	$(0, 40, 0, 20)$	B ✓
X_1, S_1	X_2, S_2	$(30, 0, 10, 0)$	C ✓
X_1, S_2	X_2, S_1	$(40, 0, 0, -20)$	A ×

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$LP \begin{cases} \max Z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad \text{متغیرهای تصمیم} : \; X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad [B \cdot N] \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b \Longrightarrow BX_B + NX_N = b$$

$$X_N \equiv 0 \Longrightarrow BX_B = b \Longrightarrow X_B = B^{-1} b$$

$$X_B = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow X_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

الگوریتم حل مسئله LP :

1. از یک BFS اولیه شروع می‌کنیم (اگر که داشته باشیم ، بهتر است که‌ها را X_B انتخاب)

$\leftarrow F$ بدست می‌آید . می‌خواهیم از F به B , C برسیم.

تعریف : به دو BFS مجاور (همسایه) هم گفته می‌شود اگر در یک مسئله LP با m محدودیت و n متغیر دارای $(m-1)$ متغیر پایه مشترک باشند . دو BFS مجاور هم وابسته به دو نقطه‌ی گوشه مجاور در فضای موجه می‌باشند.

یعنی فقط یک متغیر پایه متفاوت دارند

2. به یکی از BFS های مجاور می‌رویم.

$B \leftarrow E \leftarrow C \leftarrow F$

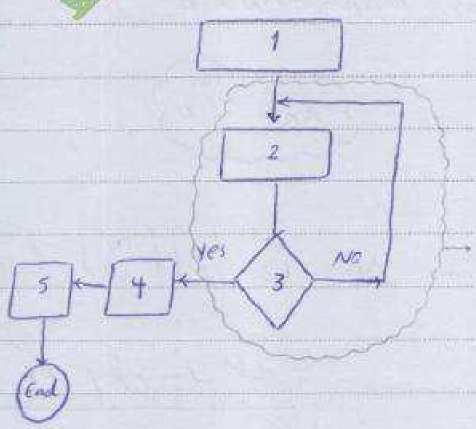
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3. آیا همه BFS ها بررسی شده اند؟

yes

4. مقادیر تابع هدف BFS را تعیین ← 5. جواب بهینه را مشخص



مزیت: حتماً جواب بهینه یک مسئله LP را

در صورت وجود تولید می کند

عیب شده زمان

تعداد دفعات اجرای حلقه موجود در الگوریتم:

" تعداد BFS های موجود در یک مسئله LP

در بدترین حالت " (حداکثر) : $\binom{n}{m}$ ← وقتی همه BFS در بیایند

تمرین تشویقی: یک مسئله LP طراحی کنید که در آن تمام جواب های پایه ای BFS

شوند با این شرط که 1) $m \geq 5$, $n \geq 7$ 2) $d_A \geq 40\%$

✓ چگالی ماتریس = $d_A = \frac{\text{تعداد عناصر غیرصفر}}{\text{تعداد کل عناصر}}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Simplex Algorithm

الگوریتم سیمپلکس :

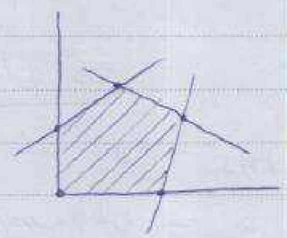
الگوریتم سیمپلکس توسط G. Dantzig برای حل مسائل LP طراحی شد.

در این الگوریتم سعی می شود هر BFS جدید که مجاور BFS قبلی است به نحوی تولید شود که

شرط موجه بودن

همواره مقدار تابع هدف را نسبت به جواب قبلی بهتر کند.

شرط بهینگی



* Simplex نوعی خاص از ترکیب محدب است.

بردارها

مثال :

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

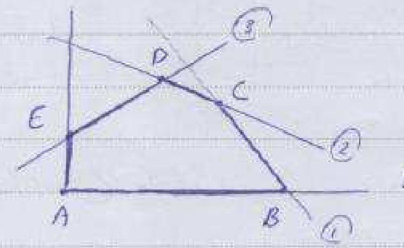
s.t.

① $2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6$

② $-3x_1 + 2x_2 + s_2 = 3$

③ $2x_1 + x_2 + s_3 = 4$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



پایه : $S_1 \quad S_2 \quad S_3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = B \qquad X_B = B^{-1} b$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \quad X_B = Ib = b$$

* اگر در یک مسئله برنامه ریزی خطی همه ی محدودیت های اولیه به صورت $\leq$ باشند

که با اضافه کردن متغیرهای slack در فرم استاندارد به صورت = درآیند، در اینصورت

برای یافتن BFS اولیه در الگوریتم سیمپلکس از متغیرهای پایه $X_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}$ استفاده می کنیم

* تمام محاسبات مربوط به الگوریتم S. در جدولی به نام جدول Simplex انجام می شود

جدول S.:

A نقطه گوشه				x_3	x_4	x_5		Right Hand Side
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z	1	-4	-3	0	0	0	0	سطر تابع هدف / سطر Z
S_1	0	2	3	1	0	0	6	سطر ۱
S_2	0	-3	2	0	1	0	3	
به جدول بعد S_3	0	2	1	0	0	1	4	

همواره به این صورت

* تابع هدف مسئله نیز به صورت یک معادله نشان داده می شود:

$$Z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n \rightarrow Z - C_1X_1 - \cdots - C_nX_n = 0$$

* اگر فرض کنیم متغیرهای مسئله (متغیرهای اصلی / اضافی / مازاد) به صورت $X_1, \ldots, X_n$

نامگذاری شوند ستون ضرایب وابسته به هر متغیر X_j در محدودیت ها a_j نامگذاری می شود

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مثلا: $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

* عنصر موجود در i-امین ردیف ستون y_j را به صورت y_{ij} نگهداری می کنیم

$y_{22} = 2$ $y_{13} = 1$ $y_{34} = 0$

* عناصر موجود در ستون RHS وابسته به هر متغیر پایه در واقع مقدار آن متغیر پایه در جدول مربوط است.

$S_1 = 6$ $S_2 = 3$ $S_3 = 4$

* در جدول شروع این مقادیر در واقع مقادیر سمت راست محدودیت های باشند. $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

بردار ستونی وابسته به مقادیر متغیرهای پایه را به صورت $\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}$ نمایش می دهیم.

در جدول شروع $X_B = b = \bar{b}$ $\bar{b}_1 = 6$ $\bar{b}_2 = 3$ $\bar{b}_3 = 4$

* برای ضرایب وابسته به متغیر X_j در سطر Z (سطر تابع هدف) نام $Z_j - C_j$ استفاده می شود:

$Z_2 - C_2 = -3$

$Z_5 - C_5 = 0$

$Z_1 - C_1 = -4$

* در جدول شروع: $Z_j - C_j = -C_j$

PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

متغیر وارد شونده به پایه (The Entering Variable): یکی از متغیرهای غیرپایه تکرار فعلی است که قرار است در تکرار بعد وارد پایه شود و به وسیله شرط بهینگی (Optimality Condition) تعیین می شود.

شرط بهینگی: متغیری نظیر x_k جهت ورود به پایه انتخاب می شود که در یک مسئله به فرم Max دارای $z_k - c_k = \min\{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$ (اگر Min باشد مثبت ترین در بین مثبت ها)

منفی ترین در بین منفی ها

متغیر خارج شونده از پایه: یکی از متغیرهای پایه — از پایه خارج شود و به وسیله

(در Max و Min فرقی نمی کند)

شرط موجه بودن (Feasibility Condition) تعیین ← The Leaving V

شرط موجه بودن:

دستگاه مثلا ← (با اطلاعات جدید)

① $2X_1 + S_1 = 6$ $\quad S_1 = 6 - 2X_1$

② $-3X_1 + S_2 = 3$ $\longmapsto$ $S_2 = 3 + 3X_1$

③ $2X_1 + \cancel{X_2} + S_3 = 4$ $\quad S_3 = 4 - 2X_1$

با ورود X_1 به داخل پایه و با توجه به تابع هدف (Max) می خواهیم حتی الامکان X_1 بزرگتر شود. یعنی X_1 تا جایی بزرگتر شود که سایر متغیرها منفی نشوند.

حدود $\Rightarrow$ $X_1 \le \frac{6}{2} = 3$ $\Rightarrow X_1 = 2 \longrightarrow S_3 = 0$ $\quad S_1, S_2 > 0$

$X_1 \le 4/2 = 2$

جهت خروج از پایه انتخاب می شه

Subject:
Year . Month . Date . ( )

<u>شرط موجه بودن</u>: فرض کنید متغیر X_k به عنوان متغیر ورودی انتخاب شده باشد در این صورت

متغیر X_r به عنوان متغیر خروجی از پایه انتخاب می شود اگر:

$$\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik}>0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

* به محاسبه { min } تست نسبت (Ratio Test) گویند.

$$\min\left\{\frac{6}{2}, \ldots, \frac{4}{2}\right\} = 2 \Longrightarrow S_3 \text{ خروجی}$$

* اگر در تست نسبت، $y_{ik} \leq 0$: باشد یعنی مسئله دارای جواب بی است =

جواب بی کران (Unbounded Solution)

B پایه	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z	1	0	-1	0	0	2	8	
S_1	0	0	2	1	0	-1	2	
S_2	0	0	$3\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	9	
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2	$\times 3 + R_2$

دستگاه معادلات طوری بازنویسی می شود که به جای S_3، X_1 متغیر پایه باشد. (در معادله سوم ضریبش 1 و در بقیه 0 شود):

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(3) $X_1 + \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{2} S_3 = 2$

(2) $3\frac{1}{2} X_2 + S_2 + \frac{3}{2} S_3 = 9$

(1) $2X_2 + S_1 - S_3 = 2$

هدف : (0) $Z - X_2 + 2S_3 = 8$ — می‌خواهیم X_1 ضریبش ۱ شود ↓ پایه

$\Longrightarrow X_1 = 2 \quad X_2 = 0 \quad S_1 = 2 \quad S_2 = 9$

$S_3 = 0 \quad Z = 8$

b : محل تقاطع ورودی و خروجی = عنصر پاشنه = عنصر لولا

* وقتی متوقف می‌شویم که دیگر متغیری را برای ورود به پایه نیابیم.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & X_1 \end{array} \\
I = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

با توجه به شرط بهینگی (منفی‌ترین در منفی‌ها) ← ورودی : X_2

شرط موجه بودن : $Min\left\{ \frac{2}{2} , \frac{9}{3\frac{1}{2}} , \frac{2}{\frac{1}{2}} \right\} = 1 \rightarrow$ خروجی S_1

PAPCO

نقطه C	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	0	0	$1/2$	0	$3/2$	9
x_2	0	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	1
s_2	0	0	0	$-7/4$	1	$13/4$	$11/2$
x_1	0	1	0	$-1/4$	0	$3/4$	$3/2$

* چون تمام $z_j - c_j$ ها مثبت هستند، پس به جدول بهینه رسیده‌ایم.

* اگر روش هندسی را به کار می‌بردیم، باید همه BFS ها را بررسی می‌کردیم

* ضرایب متغیرهای پایه در محدودیت‌ها 1 است. ضریب متغیرهای پایه در سطر z، 0 است.

خلاصه روش سیمپلکس برای یک مسئله استاندارد با تابع هدف max :

1. یک BFS اولیه را انتخاب می‌کنیم. برای این منظور:

الف) اگر مسئله اصلی به فرم کانونی بود در این صورت کلیه متغیرهای کمکی $s_1, \ldots, s_m$ که جهت تبدیل به فرم استاندارد استفاده شده‌اند به عنوان BFS اولیه استفاده می‌شوند.

ب) اگر به دلیل وجود محدودیت‌ها به شکل $\geq$ یا $=$ در مسئله اصلی امکان تشخیص BFS اولیه وجود نداشت در این صورت باید از روش‌هایی نظیر روش M بزرگ (Big M Method) یا روش دو فاز (Two Phase Method) استفاده می‌شود. (بعداً)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2. انتخاب متغیر ورودی به پایه از طریق شرط بهینگی : در این صورت متغیر X_k جهت ورود به پایه انتخاب می شود اگر $z_k - c_k = \min\{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$.

شرط توقف : اگر $z_j - c_j \geq 0$ ، $\forall j$ ، فعلی بهینه است و متوقف می شویم .

3. انتخاب متغیر خروجی از پایه از طریق شرط موجه بودن (تست نسبت) در اینصورت متغیر X_r برای خروج از پایه انتخاب می شود اگر : $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$

اگر $\forall i : y_{ik} < 0$ جواب مسئله بی کران است .

4. تکرار جدید الگوریتم با جایگزینی متغیر X_k در داخل پایه و خروج متغیر X_r از داخل پایه فعلی و انجام عملیات سطری - مقدماتی (روش گوس - جردن) جهت تعیین مقادیر جدید عناصر جدول جدید و بازگشت به گام 2

مثال :

$$\text{Max } Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

s.t.

① $8X_1 + 6X_2 + X_3 \leq 48$

② $4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 \leq 20$

③ $2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \leq 8$

④ $X_2 \leq 5$ ⟶ زاید $\qquad X_1, \ldots, X_4 \geq 0$

حل کنید ⟶ $Z^* = 280$ $\quad X_1^* = 2$ $\quad X_2^* = 0$ $\quad X_3^* = 8$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\max Z = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$

s.t.

① $8X_1 + 6X_2 + X_3 + S_1 = 48$

② $4X_1 + 2X_2 + \frac{3}{2}X_3 + S_2 = 20$

③ $2X_1 + \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + S_3 = 8$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

	z	X_1 ✓	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	-60	-30	-20	0	0	0	0
S_1	0	8	6	1	1	0	0	48
S_2	0	4	2	3/2	0	1	0	20
✓ S_3	0	$\boxed{2}$	3/2	1/2	0	0	1	8

	z	X_1	X_2	X_3 ✓	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	15	-5	0	0	30	240
S_1	0	0	0	-1	1	0	-4	16
✓ S_2	0	0	-1	1/2	0	1	-2	4
X_1	0	1	3/4	1/4	0	0	1/2	4

	z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	5	0	0	10	10	280
S_1	0	0	-2	0	1	0	-8	24
X_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
X_1	0	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	2

$\longrightarrow$ $X_1^* = 2$

$X_3^* = 8$

$X_2^* = 0$

$Z^* = 280$ ✓

PAPCO

35.5

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شکل ماتریسی جدول Simplex :

$*\quad \max\ z = CX \qquad\qquad \max\ z = [C_B\ \ C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$

$AX = b \quad \rightsquigarrow \quad [B\ N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$

$X \geq 0 \qquad\qquad X_B, X_N \geq 0$

$\Downarrow$

$\rightsquigarrow \quad *\ \max\ z = C_B X_B + C_N X_N \qquad\qquad X_N = 0 \Rightarrow BX_B = b$

$\begin{cases} BX_B + NX_N = b \\ X_B, X_N \geq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \boxed{X_B = B^{-1}b}$

$(X_N = 0)$

$\Longrightarrow \boxed{Z = C_B B^{-1} b}$

✓ $BX_B + NX_N = b \xrightarrow{B^{-1}} \underbrace{B^{-1}B}_{I} X_B + B^{-1}NX_N = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}}$

$\Longrightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \qquad = B^{-1}b - B^{-1}\underbrace{\sum_{j \in NBV}}_{} a_j x_j$

$\Longrightarrow X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} B^{-1}a_j x_j \qquad$ فرض : $\boxed{y_j = B^{-1}a_j}$

$\Longrightarrow \underline{X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} y_j x_j}$

✓ هدف : $\quad z = C_B X_B + C_N X_N \Longrightarrow z - C_B X_B - C_N X_N = 0 \Longrightarrow$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x_B = B^{-1}b - \sum \cdots$ جایگذاری $\Longrightarrow z - c_B(B^{-1}b - \sum B^{-1}a_j x_j) - c_N x_N = 0$

$\Longrightarrow z - c_B B^{-1} b + \sum_{j \in NBV} c_B B^{-1} a_j x_j - c_N x_N = 0 \Longrightarrow z - c_B B^{-1} b + \sum_{j \in -} c_B B^{-1} a_j x_j - \sum_{j \in -} c_j x_j = 0$

$z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (c_B B^{-1} a_j - c_j)\, x_j$

فرض : $z_j = c_B B^{-1} a_j$

$$\Longrightarrow z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (z_j - c_j)\, x_j$$

	x_j
z	$z_j - c_j$
$X_B = \begin{pmatrix} X_{B_1} \\ X_{B_2} \\ \vdots \\ X_{B_m} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$

y_j

* نسبت تغییر در تابع هدف به ازای

یک واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j = $\dfrac{\partial z}{\partial x_j}$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)}$$

$\Longrightarrow$ هر عددی که زیر متغیر در سطر z نوشته می شود

قرینه‌ی سمت ... است. (شرط بهینگی را بیان)

✔ ورود متغیرهای غیرپایه به پایه تأثیری روی متغیرهای پایه می گذارد ؟؟ yes

* نسبت تغییر در متغیرهای پایه به ازای 1 واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j = $-y_j = \frac{\partial x_B}{\partial x_j}$

* نسبت تغییر در i امین متغیر پایه به ازای یک واحد تغییر در متغیر غیرپایه x_j = $-y_{ij} = \frac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j}$

* اگر بخواهیم مقادیر موجود در بردار سمت راست b را تغییر دهیم در این صورت:

$$\partial z/\partial b = \underbrace{C_B}_{1\times m} \underbrace{B^{-1}}_{m\times m} \Rightarrow \partial z/\partial b \quad 1\times m \quad \text{why?}$$

چون باید به ازای همه محدودیت ها باشد. (بردار سطری)

مثال:

$$\max Z = -X_1 - X_2 + 4X_3$$

s.t
① $X_1 + X_2 + 2X_3 + \underline{X_4} = 9$
② $X_1 + X_2 - X_3 + \underline{X_5} = 2$
③ $-X_1 + X_2 + X_3 + \underline{X_6} = 4$
$X_1, \dots, X_6 \geq 0$, S

$\partial z/\partial b$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
Z	1	0	4	0	1	0	2	17
X_1	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$	$1/3$
X_5	0	0	2	0	0	1	1	6
X_3	0	0	$2/3$	1	$1/3$	0	$1/3$	$13/3$

B^{-1}

Subject:

Year. Month. Date.

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}b = B^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{pmatrix} \qquad Z = C_B \underbrace{B^{-1}b} = (-1, 0, 4)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{pmatrix} = 17$$

$$y_2 = B^{-1}a_2 = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad y_6 = B^{-1}a_6 = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z_2 - C_2 = C_B \underbrace{B^{-1}a_2}_{y_2} - C_2 = (-1, 0, 4)\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix} - (-1) = 4$$

* جدول بهینه بوده است .

* حالا می خواهیم به یک BFS دیگر برویم :

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(Z_j - C_j)$$

$$\to \quad \partial z / \partial x_2 = -4 \qquad \partial z / \partial x_4 = -1 \qquad \partial z / \partial x_6 = -2$$

⇐ با ورود به پایه تابع هدف را بدتر می کند ⇐ جواب بهینه است و لازم نیست .

* مثلاً اگر x_2 وارد پایه شود :

$$\frac{\partial X_B}{\partial x_2} = -y_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \rightsquigarrow \frac{\partial x_5}{\partial x_2} \\ \rightsquigarrow \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \end{matrix}$$

* با ورود x_6 به پایه $x_1 \uparrow$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به $C_B B^{-1}$ ضریب سیمپلکس می گوییم.

$$\frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1} = (-1, 0, 4) B^{-1} = (\underbrace{1}_{\partial z/\partial b_1}, \underbrace{0}_{\partial z/\partial b_2}, \underbrace{2}_{\partial z/\partial b_3})$$

نشان می دهد که محدودیت ها 1 و 3 به حد خود رسیده اند اما هنوز در محدودیت 2 جا دارد که متغیرها اضافه شوند.

$$(Y_4, Y_5, Y_6) = B^{-1}(a_4, a_5, a_6) = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

* همواره ستون های زیر متغیرهای کمکی B^{-1} را مشخص می کند.

* اگر محدودیت های اصلی مسئله به صورت $\leq$ باشند، در این صورت با اضافه شدن متغیرهای کمکی $(S_1, \ldots, S_m)$ به فرم استاندارد تبدیل شده و ستون های وابسته به آنها در هر جدول سیمپلکس $(Y_{S_1}, Y_{S_2}, \ldots, Y_{S_m})$ تشکیل B^{-1} را می دهند.

$$(Z_4 - C_4, Z_5 - C_5, Z_6 - C_6) = C_B B^{-1}\overbrace{(a_4, a_5, a_6)}^{I_m} - (C_4, C_5, C_6) = C_B B^{-1}$$

* ضریب سیمپلکس در مسئله فوق در واقع $Z_j - C_j$ متغیرهای کمکی است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

*** شکل ماتریسی Simplex :

#	X_j ($Z_j - C_j$)	RHS
Z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

* همه اطلاعات را داریم . با داشتن متغیرهای پایه B ، ـــ B^{-1} را محاسبه

شرط بهینگی روش Simplex :

می‌خواهیم از بین متغیرهای غیرپایه تکرار فعلی ← $Z = C_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} (Z_j - C_j) X_j$

متغیری وارد پایه شود که در مسئله Max . بیشترین

تغییر در تابع هدف به وجود آورد ، $\max_{j \in NBV} \left[\partial Z / \partial X_j \right] = \max \left[-(Z_j - C_j) \right]$

که معادل منفی‌ترین $Z_j - C_j$ است.

شرط موجه بودن (Feasiblity Condition) :

فرض کنید متغیر X_k در یک تکرار جهت ورود به پایه انتخاب شده است. حال می‌خواهیم متغیر خروجی از پایه را تعیین کنیم

		X_k	
	Z		
X_B	X_{B_1} ⋮ X_{B_m}		$B^{-1} b$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NBV} y_j x_j \xrightarrow{x_k \text{ به پایه}} X_B = B^{-1}b - y_k x_k$$

اگر i امین متغیر پایه فعلی یعنی X_{B_i} مقدار این متغیر عبارتست از:

$$X_{B_i} = (B^{-1}b)_i - y_{ik} x_k$$

x_k قرار است پس از ورود به پایه غیرمنفی باشد، هم چنین سایر متغیرهای پایه فعلی را منفی نکند پس:

$$\begin{cases} \forall i: X_{B_i} \geq 0 \\ x_k \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (B^{-1}b)_i - y_{ik} x_k \geq 0 \\ x_k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_k \leq \dfrac{(B^{-1}b)_i}{y_{ik}} \Big|_{y_{ik} > 0} \\ x_k \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{از min همه کوچکتر}} \min \left\{ \dfrac{\overbrace{(B^{-1}b)_i}^{\bar{b}}}{y_{ik}} \,\Big|\, y_{ik} > 0 \right\}$$

«تست نسبت»

* در روش Simplex از BFS فعلی موجود سعی می شود به BFS همسایه حرکت کند به نحوی که مقدار تابع هدف بدتر نشود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

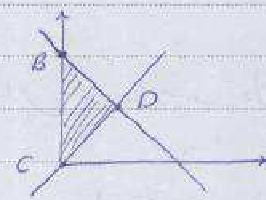
$\max Z = 5X_1 + 2X_2$

s.t.

(1) $X_1 + X_2 + S_1 = 6$

(2) $X_1 - X_2 + S_2 = 0$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$



X_B	X_N	X_1, X_2, S_1, S_2	نقطه گوشه
(S_1, S_2)	(X_1, X_2)	0, 0, 6, 0	C
(X_1, S_1)	(X_2, S_2)	0, 0, 6, 0	C
(X_2, S_1)	(X_1, S_2)	0, 0, 6, 0	C

* باید $n-m$ تا ۰ (اینجا 2 تا) وجود داشته باشد اما اینجا زیاد است (3 تا) و

نمی توان تشخیص داد کدام غیر پایه ای بوده!

* اگر در یک BFS مسئله LP مقدار حداقل یکی از متغیرهای پایه ای ۰ شود آنگاه آن را BFS

تباهیده می نامند (Degenerate BFS)

* در یک BFS تباهیده تعداد ۰ها موجود $> n-m$.

در D: S_1, S_2 غیرپایه، X_1, X_2 پایه، اما در C چه طور؟

PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کدام ها ؟ ← X_1 و X_2 و S_2 پایه، S_1 C(0،0،6،0)

این BFS محل برخورد 3 نیم فضا است

([illegible] قرار است)

* در BFS های تباهیده، یک BFS تباهیده به یک نقطه گوشه فضای موجه وابسته است.

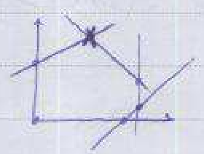
اما در یک BFS تباهیده ترکیب های متفاوتی از متغیرها در مجموعه متغیرهای پایه وجود دارد

به عبارت دیگر در یک BFS غیرتباهیده ترکیب مجموعه متغیرهای پایه منحصر به فرد است.

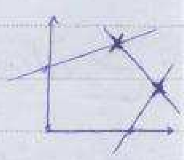
** هنگامی که برای حل یک مسئله LP از روش Simplex استفاده می کنیم، حالات زیر

ممکن است اتفاق بیفتد:

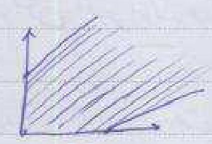
I) مسئله LP دارای جواب نباشد (فضای موجه تهی باشد)



II) دارای جواب بهینه منحصر به فرد است:



III) دارای جواب های بهینه چندگانه است.



IV دارای جواب بیکران است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

؟ این حالت‌ها در روش Simplex چگونه قابل تشخیص اند ؟

I) هنگام حل مسئله به روش S ، BFS اولیه تشکیل نمی‌شود با استفاده از روشهای دو فازی و M-بزرگ)

II) هنگام حل مسئله با روش S ، در بررسی شرط توقف برای BFS فعلی (در max)

$\forall j \in NBV : z_j - c_j > 0$ $\quad z_{\text{فعلی}} = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in NBV} \underbrace{(z_j - c_j)}_{>0} x_j$

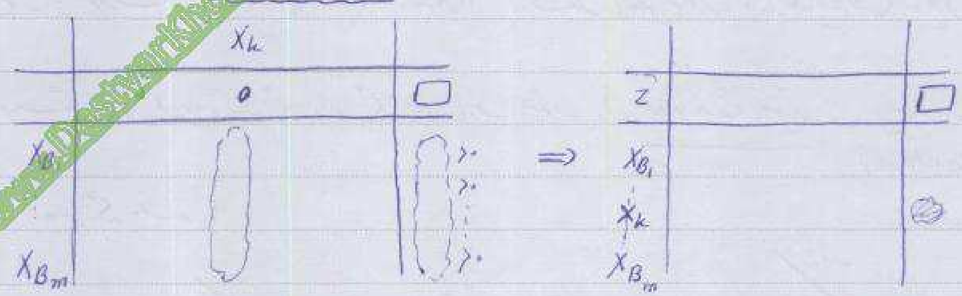
III Alternative Optimal Solution : در این حالت حداقل دو BFS متفاوت وجود دارد که مقدار بهینه تابع هدف را تولید می‌کند. (دو BFS متفاوت از نظر ترکیب و مقادیر متغیرها متفاوت اند). از جمله مواردی که این حالت اتفاق می‌افتد هنگامی است که :

اگر در جدول بهینه (مسئله max) یک مسئله به ازای حداقل یک متغیر غیرپایه نظیر x_k داشته باشیم : $z_k - c_k = 0$ و این متغیر بتواند در تکرار بعد وارد پایه شود و حالت تباهیدگی وجود نداشته باشد در این صورت جواب بهینه چندگانه خواهیم داشت :

حالت تباهیدگی وقتی وجود دارد که حداقل یکی از $\bar{b}$ها صفر باشد.

Subject:
Year: Month: Date: ( )

Opt. Solution



$Z_{new} = Z_{old} - (Z_k - C_k)\,x_k$ ← تغییر نمی‌کند

بگونه‌ای تقسیم BFS جدید تولید شده؟ متناظر سمت راست بر یک + تقسیم شده

Max $Z = 4X_1 + 14X_2$

s.t.

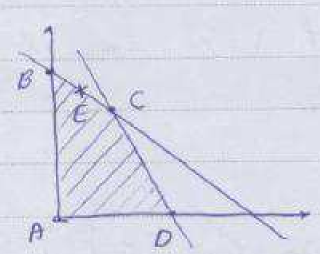
(1) $2X_1 + 7X_2 + S_1 = 21$

(2) $7X_1 + 2X_2 + S_2 = 21$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

C	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	2	0	42
X_2	0	1	$7/45$	$-2/45$	$7/3$
X_1	1	0	$-2/45$	$7/45$	$7/3$

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	2	0	42
X_2	0	$2/7$	1	$1/7$	0	3
S_2	0	$45/7$	0	$-2/7$	1	15



BFS ها متفاوت است اما Z^* یکی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محدودیتی که به صورت $a_1x_1+\dots+a_nx_n \le b$ در مسئله اصلی بوده و با جایگذاری مقادیر بهینه به صورت $a_1x_1^*+a_2x_2^*+\dots+a_nx_n^*=b$ ارضا شود را محدودیت مقید (Binding constant) گویند. (که البته $S^*=0$)

* در حالت جواب بهینه چندگانه در مسئله max محدودیت مقیدی وجود دارد که منطبق بر یکی از خطوط هم سود شود. (به ازای همه BFS ها بهینه مقید است)

* در مثال بالا دو BFS بهینه داریم:

$$B\begin{cases} x_1^*=0 \\ x_2^*=3 \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_1^*=7/3 \\ x_2^*=7/3 \end{cases}$$

(ولی بیشمار جواب غیر پایه‌ای موجه بهینه)

ترکیب محدب آنها:

$$X = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$0 \le \lambda \le 1$$

این ترکیب محدب در واقع پاره خط واصل مابین نقاط گوشه B و C است.

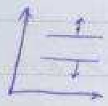
$$\text{if: } \lambda = 1/2 \rightarrow X = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 8/3 \end{pmatrix} : E \qquad Z_E = 42$$

$\Leftarrow$ E نقطه بهینه است.

در نقطه E مقادیر متغیرها به صورت $(7/6, 8/3, 0, 15/2)$ است. نقطه E در واقع یک جواب غیر پایه‌ای موجه ولی بهینه است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* در حالت جواب بهینه چندگانه، تعداد BFS های متفاوت بهینه محدود است اما دارای بی‌شمار جواب های غیر پایه‌ای موجه بهینه هستیم.



* در جواب چندگانه محدودیت موازی با Z است اما برعکس درجهت عینیت :

مثال :

(Max)

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	0	2	10
X_1	1	0	2	1	2
X_2	0	1	$\boxed{3}$	2	0

جواب به چه صورت ؟

(2،0،0،0،0)

تباهیده!

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	0	2	10
X_1	1	$-2/3$	0	$-1/3$	2
S_1	0	$1/3$	1	$2/3$	0

→ (2،0،0،0،0)

* در تست نسبت همواره متغیری که تباهیده می‌کند (سمت راست ۰) برنده می‌شود (اگر واحد شود)

* مقدار تست نسبت در عین حال که متغیر خروجی از پایه را مشخص می‌کند "بیانگر مقدار متغیر ورودی به پایه در تکرار بعدی است".

P4PCO

$\boxed{3} \longrightarrow \boxed{-3}$:

نمی تواند وارد سمت مثبت شود و متغیر دیگری وارد پایه می شود. در این حالت BFS جدید تولید می شود => جواب چندگانه داریم.

ادامه

IV) جواب بیکران :

مسئله LP به فرم
$$\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید. فرض کنید در یکی از تکرارهای روش که یک متغیر غیرپایه نظیر X_k با $Z_k - C_k < 0$ و $Y_k \leq 0$ وجود داشته باشد:

	X_k
	$Z_k - C_k < 0$
X_B	$y_{1k} \leq 0$
	$\vdots \quad \leq 0$
	$y_{mk} \quad \vdots$

ورود X_k به داخل پایه در تکرار بعد موجب می شود که :

$$X_B = B^{-1}b - \sum_{j \in NB} Y_j X_j$$

$Y_k \leq 0$ و X_k ، می خواهد با مقدار مثبت وارد شود

$$X_B = B^{-1}b - \underbrace{Y_k X_k}_{>0}$$

$\Rightarrow X_k \longrightarrow +\infty$

(هیچ محدودیتی ندارد)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

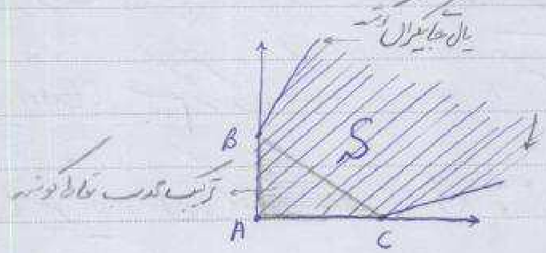
$$Z = C_B B^{-1} b - (Z_k - C_k) X_k \qquad \begin{matrix} Z_k - C_k < 0 \\ X_k \geq 0 \end{matrix} \implies Z \to +\infty$$

* شرط بی‌کران بودن مسئله LP فوق وجود یک متغیر غیرپایه نظیر X_k است به نحوی که $Z_k - C_k > 0$ و $Y_k \leq 0$. (ستون نسبت برای متغیر ورودی قابل اجرا نباشد)

$\max Z = X_1 + 3X_2$

s.t. ① $X_1 - 2X_2 \leq 4$

② $-X_1 + X_2 \leq 3$



B	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	-4	0	0	3	9
S_1	-1	0	1	2	10
X_2	-1	1	0	1	3

معادلات $\longmapsto$ وابسته

$$-X_1 + S_1 + \cancel{2S_2} = 10$$
$$-X_1 + X_2 + \cancel{S_2} = 3$$
$$Z - 4X_1 + \cancel{3S_2} = 9$$

* S_2 مطمئناً غیرپایه می‌ماند.

$$S_1 = 10 + X_1$$
$$X_2 = 3 + X_1 \quad \longmapsto \quad X_1 \to \infty$$
$$Z = 9 + 4X_1 \qquad\qquad Z \to \infty$$

? آیا به دلیل بی‌کران بودن فضا جواب بی‌کران شد ؟؟ No

* در صورتی که به ازای یک متغیر نظیر X_k داشته باشیم : $Y_k \leq 0$ اما $Z_k - C_k \geq 0$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دراین صورت فضای جواب بیکران اما جواب مسئله می تواند بیکران باشد.

* در دنیای واقعی مسئله ای وجود ندارد که جواب بیکران داشته باشد و همواره محدودیت سرمایه، نیروی انسانی، ... وجود دارد.

* در حالتی که فضای موجه مسئله بیکران است علاوه بر نقاط گوشه دارای یال های بیکران گوشه (Extreme Unbounded Edge) هستیم که یک نقطه گوشه موجود را به گوشه ای در ∞ در راستای جهت حدی نظیر d وصل می کند:

$$X = X^* + \lambda d \qquad \lambda \geq 0$$

(کانونی)

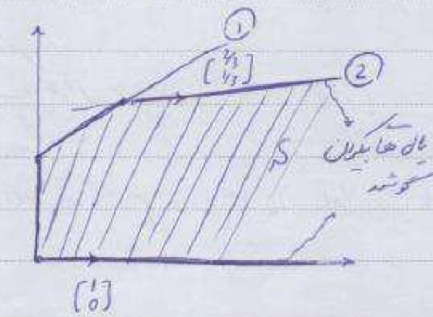
* در یک مجموعه محدب غیرتهی نظیر $S = \{ X \mid AX \leq b, X \geq 0 \}$ ، بردار غیرصفر d جهت (Direction) مجموعه S است، اگر و فقط اگر متعلق به مجموعه $D = \{ d \mid d \geq 0, d \neq 0, Ad \leq 0 \}$ باشد.

مثال: جهت ها؟

① $-X_1 + X_2 \leq 2$

② $-X_1 + 2X_2 \leq 6$

③ $X_1, X_2 \geq 0$



Subject :
Year . Month . Date . ( )

$$D \begin{cases} -d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ d_1, d_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(معادلات همگن)

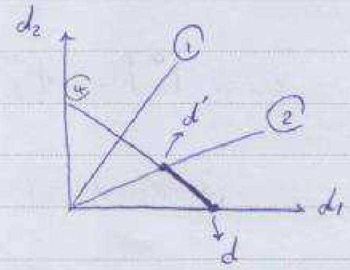
* برای نرمال کردن جهت ها d می توان محدودیت $1d = 1$ را اضافه کرد.

$$1d = 1 \Rightarrow (1,1)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow d_1 + d_2 = 1$$

* چرا نرمال می کنیم؟ برای اینکه وقتی جمع 1 است، نسبت دو بردار، سازگار قابل مشاهده است.

* منظور از جهت ها حدی (Extreme Directions) همان نقاط گوشه مجموعه D.

$$D \text{ نرمال} \begin{cases} ① -d_1 + d_2 \leq 0 \\ ② -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ ③ d_1, d_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ ④ d_1 + d_2 = 1 \end{cases}$$



$$\longrightarrow \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d' = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \geq 0 \qquad\qquad \lambda \geq 0$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

** قضیه اساسی مربوط به فضای بیکران در یک مسئله LP :

هنگامی که در یک مسئله LP فضای مسئله بیکران باشد در اینصورت هر نقطه متعلق به این فضای بیکران را می‌توان به صورت ترکیب محدب نقاط گوشه که و ترکیب خطی غیرمنفی جهت‌های حدی که نوشت.

x_j^* : نقاط گوشه $\qquad$ جهت حدی k : d_k^*

$$\underset{\sim}{X} \in S \implies \begin{cases} X = \sum_j \alpha_j x_j^* + \sum_k \beta_k d_k^* \\ \sum_j \alpha_j = 1 \qquad \alpha_j, \beta_k \geq 0 \end{cases}$$

$$X = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \qquad \alpha_j \geq 0 , \ \beta_1, \beta_2 \geq 0$$

تمرین تشویقی : تولید 50 نقطه تصادفی موجه در فضای که و تعیین ضرایب α و β

آیا α و β منحصر به فرد هستند ؟ زمان تحویل

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

** شرط لازم و کافی جهت بیکران بودن جواب مسئله LP :

جواب مسئله LP به صورت $\begin{cases} \max z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ بیکران است اگر به ازای حداقل

یک جهت حدی نظیر d داشته باشیم : $cd > 0$ $\{cd < 0 \;:\; \min\}$

جواب ؟ $\max Z = -X_1 + 3X_2$: تابع هدف

$cd = (-1, 3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1$ $cd' = (-1, 3)\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix} = 1/3 > 0$ ← بیکران

تباهیدگی Degeneracy :

در یک جواب تباهیده مسئله LP حداقل یکی از متغیرهای پایه صفر است.

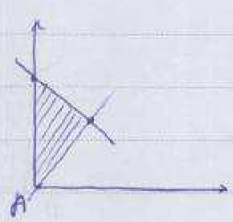
** یکی از دلایل بروز تباهیدگی محدودیت های زاید است.

$\max z = 5X_1 + 2X_2$

① $X_1 + X_2 \leq 6$

② $X_1 - X_2 \leq 0$

$X_1, X_2 \geq 0$



در A تباهیدگی وجود دارد.

زاید است : $X_2 \geq 0$

$X_1 \leq X_2 \;,\; X_1 \geq 0 \rightarrow X_2 \geq 0$

	X_1	X_2	RHS
z	-5	-2	0
S_1	1	1	6
S_2	1	-1	0

→

Subject:

Year. Month. Date. ( )

	X_2	S_2	RHS
Z	-7	5	0
S_1	2	-1	6
X_1	-1	0	0

$(0,0,6,0) \longrightarrow A$

تباهیدگی یک جور درجا زدن است، نه تابع هدف را بهینه می کند و نه به نقطه جدید می رود

	S_1	S_2	RHS
Z			
X_2			
X_1			

$\downarrow$ B

** یکی دیگر از حالات بروز تباهیدگی هنگامی است که بیش از یک کاندید (متغیر) خروج از پایه باشد

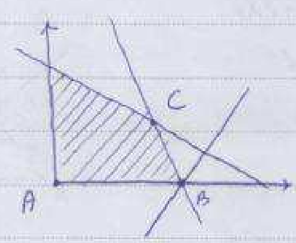
$\equiv$ در شبکه [illegible] گره وجود دارد.

$\max Z = 2X_1 + X_2$

① $4X_1 + 3X_2 \leq 12$

② $4X_1 + X_2 \leq 8$

③ $4X_1 - X_2 \leq 8$



	X_1	X_2	RHS
Z	-2	-1	0
S_1	4	3	12
S_2	4	1	8
S_3	4	-1	8

$\min \left\{ \frac{12}{4}, \frac{8}{4}, \frac{8}{4} \right\} = 2 \xrightarrow{S_2, S_3}$ دلخواه $\downarrow$ S_2

	X_2	S_2	RHS
z			
S_1			4
X_1			2
S_3			0

متغیری که کنار گذاشته شد (S_2)

مقدار ۰ می گیرد. ضریب × ۰ = ۰

به دور افتادن

قضیه (Dantzig) : در یک مسئله Lp درصورتی که تباهیدگی وجود نداشته باشد و فضای موجه تهی نباشد به کارگیری روش Simplex پس از تعداد محدودی تکرار یا منجر به جواب بهینه مسئله خواهد شد و یا منجر به این نتیجه که جواب مسئله بیکران است.

قضیه، پایه گر درستی روش Simplex است.

* در یکی از حالات خاص و نادر تباهیدگی که براثر وجود گره در شبکه سبب اتفاق می افتد در یک دور از پایه هایی که همگی متعلق به یک نقطه گوشه هستند گیر خواهیم افتاد:

$$B_1 \to B_2 \to B_3 \to \cdots \to B_k = B_1$$

تباهیده تباهیده تباهیده

حالت به دور افتادن (Cycling) اتفاق افتاده است

* روش سیمپلکس در حالتی که به دور افتادن وجود دارد با تغییرات کوچکی قابل اجرا است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تبهگنی کوچک : 1. روش اغتشاش 2. روش Bland

(مطالعه کلاسی)

روش ام بزرگ (Big M Method)

این روش هنگامی به کار می‌رود که تشخیص BFS اولیه امکان‌پذیر نباشد.

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 \quad + R_1$$

st. ① $3X_1 + X_2 = 3$ $\quad +R_2$

② $4X_1 + 3X_2 \geq 6 \quad \rightarrow \quad 4X_1 + 3X_2 - S_1 = 6$

③ $X_1 + 2X_2 \leq 3 \quad \quad X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
Z	-4	-1	0	-M	-M	0	
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_2	1	2	0	0	0	1	3

، که چون شرط موجه بودن را تأمین می‌کند می‌شود پایه شود.

✓ S_2 که طوری بود که ضریبش در یک محدودیت 1+ و در بقیه 0 بود.

خودمان R_1 و R_2 را به معادلات ① و ② اضافه می‌کنیم. این تضمین را داریم که در آخر مقدارشان 0 می‌شود ← درست است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* به متغیرهایی مثل R_1 و R_2 که به سمت چپ معادلات مسئله LP در فرم استاندارد اضافه می شوند تا تشکیل BFS اولیه میسر شود، متغیرهای مصنوعی (Artificial Variables) گویند. متغیرهای مصنوعی باعث نقض معادلات مربوط می شود اگر مقدارشان غیر صفر شود.

* جهت تضمین ۰ شدن R_1 و R_2 : ضرایب آنها در تابع هدف را ضرایب بسیار بزرگ در نظر می گیریم :

تابع هدف : min $\Leftarrow$ یک ضریب بسیار بزرگ $+M$

— : max $\Leftarrow$ .... $-M$

تابع هدف : $\min Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

* در جدول شروع M بزرگ (همین طور در فاز اول و دوم روش دوفاز) باید مقادیر $Z_j - C_j$ متغیرهای مصنوعی موجود در پایه ۰ شود. برای این منظور از عملیات سطری استفاده می کنیم:

سطر Z جدید = سطر Z قدیم + $M \times$ (سطر R_1) + M (سطر R_2)

$\Rightarrow$ Z(جدید) | $7M-4$ $4M-1$ $-M$ 0   0   0 $9M$

$\Leftarrow$ متغیر ورودی : X_1 خروجی : R_1

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
Z	0	$\frac{5}{3}M+\frac{1}{3}$	$-M$	$-\frac{7}{3}M+\frac{7}{3}$	0	0	$2M+4$
X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
S_2	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2

✓ هرچه زودتر خارج شوند بهترند

$\min \left\{ \frac{1}{1/3} , \frac{2}{5/3} , \frac{2}{5/3} \right\} = 6/5 \longrightarrow R_2$ یا $S_2 \longrightarrow R_2$

⋮

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
Z	0	0	0	$-M+7/5$	$-M$	$-1/5$	$18/5$
X_1			Optimal Solution				$3/5$
X_2							$6/5$
S_1							0

$X_1^* = 3/5$

$X_2^* = 6/5$

$R_1^* = R_2^* = S_1^* = S_2^* = 0$

خلاصه روش M بزرگ :

① اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به محدودیت های $\geq$ یا $=$ درصورت نیاز.

② تخصیص ضرایب لازم به متغیرهای مصنوعی در تابع هدف

③ تشکیل جدول Simplex با استفاده از متغیرهای مصنوعی در تابع هدف

④ انجام عملیات سطری برای صفر کردن ضرایب متغیرهای مصنوعی در تابع هدف

⑤ ادامه حل مسئله با روش که معمولی تا حصول جواب نهایی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* معمولاً به دلیل خطای گرد کردن ناشی از ضریب M امکان بروز خطا در جواب بهینه حاصل از M بزرگ وجود دارد.

تمرین تشویقی: ذکر یک مثال + حل آن با LINGO در مورد خطای روش M بزرگ

$$LP\begin{cases}\max\ z = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \to S \quad \Rightarrow \quad LP(M)\begin{cases}\max\ z = CX - MX_a \\ AX + X_a = b \\ X, X_a \geq 0 \end{cases} \to S(M)$$

X_a: متغیرهای مصنوعی

متغیری که ضریبش ۱ باشد وجود ندارد

* فضای موجه ($S(M)$) در مسئله $LP(M)$ تهی نیست زیرا یک جواب به صورت $X=0$ و $X_a=b\geq 0$ دارد. طبق قضیه گفته شده حل این مسئله با روش Simplex (Dantzig) یا منجر به جواب بهینه می‌شود یا منجر به جواب بی‌کران.

حل مسئله $LP(M)$ — اثبات از کتاب!

- جواب بهینه (X^*, X_a^*)
  - $X_a^* \neq 0$: مسئله LP جواب موجه ندارد
  - $X_a^* = 0$: جواب بهینه به دست می‌آید X^* برای LP
- جواب بیکران
  - $X_a^* \neq 0$: مسئله اصلی $LP(M)$ دارای جواب موجه نیست
  - $X_a^* = 0$: جواب مسئله اصلی LP بیکران

PAPCO

Subject.
Year. Month. Date.

مثال:

$$\max Z = X_1 + X_2 - MR_1 - MR_2$$

s.t.

1. $X_1 - X_2 - X_3 + R_1 = 1$
2. $-X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4 + R_2 = 1$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	RHS
Z	0	-2	0	-1	$M+2$	$M+1$	3
X_1	1	-1	0	-1	2	1	3
X_3	0	0	1	-1	1	1	2

→ جواب LP(M) بیکران است ⇐ LP اصلی هم بیکران

$X_a = 0$ +

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش دوفاز (Two-Phase Method)

$$\min\ z = 4X_1 + X_2$$

s.t.

(1) $3X_1 + X_2 + R_1 = 3$

(2) $4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6$

(3) $X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$

$S_1, S_2, R_1, R_2, X_1, X_2 \geq 0$

* در روش دوفاز پس از اضافه شدن متغیرهای مصنوعی به مسئله اصلی، ابتدا در فاز I، سعی بر آن است که با تعریف تابع هدف جدیدی به صورت «حداقل کل مصنوعی ها»، متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند و در انتهای فاز I یک BFS اولیه مسئله اصلی بدست آید. سپس در فاز II با BFS اولیه بدست آمده در انتهای فاز I و تابع هدف اصلی مسئله را حل می نماید.

فاز I: $\min\ r = R_1 + R_2$

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
r جدید	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_2	1	2	0	0	0	1	3

r جدید = r قدیم + سطر R_1 + سطر R_2

→ ...

	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1			جدول بهینه فاز I				$3/5$
X_2							$6/5$
S_2							0

* در انتهای فاز I ، 3 حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد :

(1) $r^*=0$ و هیچ متغیر مصنوعی در پایه بهینه فاز I وجود نداشته باشد.

⊛	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
r	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	1	1	-1	1	0

در این حالت BFS اولیه برای مسئله اصلی به دست آورده است و می توان فاز II را با جایگزینی تابع هدف مسئله اصلی و حذف متغیرهای مصنوعی شروع می کنیم و با روش عادی Simplex ادامه می دهیم.

	X_1	X_2	S_1	S_2
Z	-4	-1	0	0
X_1	1	0	$1/5$	
X_2	0	1	$-3/5$	—
S_2	0	0	1	

Subject :
Year . Mouth . Date . ( )

سطر Z جدید = سطر Z قدیم + $4(X_1)$ + سطر X_2

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	$1/5$	0	$16/5$
X_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	0	$6/5$
S_2	0	0	1	1	0

جدول فوق بهینه خواهد شد

(2) $r^* > 0$: در این حالت مسئله اصلی دارای جواب موجه نیست.

(چون R_1 یا R_2 یکی مثبت شده)

(3) $r^* = 0$ و حداقل یک متغیر مصنوعی در پایه بهینه فاز I به صورت تباهیده وجود دارد.

در این صورت نیز ابتدا متغیرهای مصنوعی غیرپایه را از جدول حذف کرده و تابع هدف مسئله اصلی را جایگزین کرده و عملیات سطری در مورد سطر Z انجام داده و به روش ساده Simplex مسئله را حل می کنیم تا به یکی از 3 حالت زیر بخوریم:

	X_k	
X_{B_1}		
$\vdots$		
X_{B_k}		
R_1		0
R_t		0
R_p		0

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

الف) به ازای حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی موجود در پایه داریم: $y_{tk}=0$

نظیر $\hat{R_t}$

Z		
X_{B_1}		
$\vdots$		
X_{B_k}		✓
R_1		0
$\vdots$		$\vdots$
X_k		0
$\vdots$		$\vdots$
R_p		0

در اینصورت در جدول بعدی X_k جایگزین R_t

شده و مشکلی را پایان پیش می آید

ب) اگر به ازای تمام متغیرهای مصنوعی نظیر R_t در پایه داشته باشیم $y_{tk}=0$
$t=1,\dots,p$

در این حالت X_k به ازای یک متغیر اصلی وارد پایه شده و

مقادیر R_t ، ها همان صفر می مانند.

ج) اگر الف و ب اتفاق نیفتد یعنی حداقل یک متغیر مصنوعی نظیر R_t وجود دارد که در

آن $y_{tk}<0$: در این حالت اگر X_k به جای یک متغیر اصلی وارد پایه می شود،

مقدار R_t در جدول جدید مثبت خواهد شد

متغیر تازه وارد

X_B		
R_1		
$\vdots$		
R_t		$\to >0$
$\vdots$		
R_p		

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای جلوگیری از این کار تغییر زیر را در الگوریتم که در هنگام بروز حالت ج-3، ایجاد کنیم:
بدین ترتیب که متغیر X_k را در هنگام بروز این حالت، مستقیماً به جای R_t وارد پایه نموده و
R_t را کلاً از جدول حذف می کنیم و به جای انجام شمت ستونها:

		مقادیر متغیر
z		
X_B		
R_1		0
⋮		⋮
X_k		0
⋮		⋮
R_p		0

با این کار هیچ گونه تغییری در مقادیر سایر متغیرهای پایه اتفاق نمی افتد.

مثال:

$$\min\ Z = -X_1 + 2X_2 - 3X_3$$

(1) $X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 6$

(2) $-X_1 + X_2 + 2X_3 + R_2 = 4$

(3) $2X_2 + 3X_3 + R_3 = 10$ (4) $X_2 + S_1 = 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$\min\ r = R_1 + R_2 + R_3$ «فاز I»

	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	R_2	R_3	RHS
r	0	0	0	0	-2	-2	0	0
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
R_3	0	0	0	0	-1	-1	1	0
X_3	0	0	1	1	0	0	0	2

$r^* = 0$

اما R_3 در پایه

Subject :
Year . Month . Date . ( )

	X_1	X_2	X_3	S_1	R_3	RHS
Z	1	-2	3	0	0	0
X_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
X_2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	2
R_3	0	0	0	0	1	0
X_3	0	0	1	1	0	2

← R_1 و R_2 حذف

و تابع هدف جدید

$\longmapsto *$

* همه ضرایب ۰ اند و یکی ۱ ← محدودیت زائد

مثال:

$$\max Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4$$

(1) $X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + R_1 = 5$

(2) $X_1 + X_2 + X_3 + 3X_4 + R_2 = 7$

(3) $-X_2 + X_3 + 2X_4 + R_3 = 2$

جدول نهایی فاز I :

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R_3	RHS
r	0	0	-1	0	-2	0	-2	0
X_2	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
R_2	0	0	-1	0	-1	1	1	0
X_4	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

$r^* = 0$

3 ← R_2 در پایه

حذف X X

ج-3

به جای استفاده از تست نسبت، مستقیماً X_3 به جای R_2 وارد پایه می‌شود.

+ R_2 از جدول حذف می‌شود (سمت راست تغییر نمی‌کند)

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	X_1	X_2	X_3	X_4	R_2	
					$-\frac{2}{3}$	
X_2						$\frac{8}{5}$
X_3	0	0	1	0	-1	0
X_4						$\frac{9}{5}$

اگر R_2 باشد :

دوباره می‌خواهد ← وارد پایه شود

روش تک متغیر مصنوعی

$Max\ z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n$ استاندارد

(1) $a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \geq b_1 \longrightarrow \ldots - S_1 + R_1 = b_1$

(2) $a_{21}X_1 + \cdots + a_{2n}X_n \geq b_2 \qquad - S_2 + R_2 = b_2$

$\vdots$

(m) $a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n \geq b_m \qquad - S_m + R_m = b_m$

* به دلیل آنکه اضافه شدن متغیرهای مصنوعی باعث ازدیاد زمان حل مسئله می‌شود، روش تک متغیر مصنوعی تلاش دارد که با تنها یک متغیر مصنوعی پایه اولیه شروع را تولید کند.

* این روش در کنار روش M-بزرگ یا دوفاز این پایه را ایجاد خواهد کرد :

(1) $-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \cdots - a_{1n}X_n \leq -b_1 \xrightarrow{\text{استاندارد}} \ldots + S_1 = -b_1$
$-R$

(2) $-a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \cdots - a_{2n}X_n \leq -b_2$

$\vdots$

(m) $-a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \cdots - a_{mn}X_n \leq -b_m \qquad \ldots + S_m = -b_m$
$-R$

* اگر محدودیتی به صورت = باشد، $\geq$ و $\leq$ نوشته و ...

Subject:
Year. Month. Date. ( )

	S_1	S_2	$\dots$	S_m	R	
S_1	1	0		0	-1	$-b_1$
S_2	0	1			-1	$-b_2$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
S_t	1	0			-1	$-b_t$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
				0		
S_m	0	0		1	-1	$-b_m$

→ پایه

× BFS

وارد پایه

$R \rightarrow S_t$

S_1	$b_t - b_1$
$\vdots$	$\vdots$
R	
$\vdots$	
S_m	$b_t - b_m$

≥ 0

* در مسئله فوق $S_1, \dots, S_m$ تشکیل یک پایه غیر موجه را خواهند داد. حال با وارد کردن R به جای متغیر S_t که دارای منفی ترین سمت راست است یک BFS اولیه تشکیل خواهد شد که شامل R است. جهت حذف آن می توان از روش های M بزرگ و یا دو فاز استفاده کرد.

Subject.
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$\text{Min} \quad 2X_1 + 3X_2$$

$$\text{s.t.} \quad ① \; X_1 + X_2 \geq 3 \;\rightarrow\; -X_1 - X_2 \leq -3 \;\rightarrow\; -X_1 - X_2 + S_1 - R = -3$$

$$② \; -2X_1 + X_2 \geq 2 \;\rightarrow\; 2X_1 - X_2 \leq -2 \;\rightarrow\; 2X_1 - X_2 + S_2 - R = -2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

لغزش‌ها را یکجا کردن

BFS اولیه است

M بزرگ یا →

فاز II استفاده :

	X_1	X_2	S_1	S_2	R	RHS
S_1	-1	-1	1	0	-1	-3
S_2	2	-1	0	1	-1	-2
	M	$M-3$	$-M$		0	
Z	-2	-3	0	0	$-M$	
R	1	1	-1	0	1	3
S_2	3	0	-1	1	0	1

* در جدول S داریم :

	X_k	
Z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

⇐ در هر مرحله اگر B^{-1} را داشته باشیم مسئله حل شده (؟) .

✓ تعیین وارون ماتریس پایه از طریق حاصلضرب ماتریس‌ها مقدماتی :

(Product Form of Inverse)

فرض کنید در تکرار فعلی با توجه به متغیرهای پایه X_B ، ماتریس پایه B_{old} بوده داریم :

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$B_{old} = (a_{B_1}, \dots, a_{B_r}, \dots, a_{B_m})$$

x_{B_i}

فرض کنید در تکرار بعد متغیر x_k ورودی، متغیر x_{B_r} خروجی باشد. در این صورت

پایه جدید تکرار بعدی: B_{New} ← $B_{New} = (a_{B_1}, \dots, a_k, \dots, a_{B_m})$ (I)

از طرف دیگر می‌دانیم که: $y_j = B^{-1} a_j$ (II) (که برای هر ستون جدول که وابسته به متغیرهای نظیر x_j داریم)

$$y_{B_i} = B^{-1} a_{B_i}$$

در مورد متغیرهای پایه: $y_{B_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ ام $\equiv e_i$

$$\Longrightarrow e_i = B^{-1} a_{B_i} \Rightarrow a_{B_i} = B e_i \quad \text{(III)}$$

$$\xrightarrow{III,\ II,\ I} B_{New} = (B_{old} e_1, B_{old} e_2, \dots, B_{old} \underset{*}{y_k}, \dots B_{old} e_m)$$

* در مورد متغیر غیر پایه فعلی x_k داریم: $y_k = B^{-1} a_k \Rightarrow a_k = B y_k$

$$\Longrightarrow B_{New} = B_{old} \underbrace{(e_1, e_2, \dots, y_k, \dots, e_m)}_{\leftarrow T}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_{1k} & 0 \\ 0 & 1 & y_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & y_{mk} & 1 \end{pmatrix} \qquad * \; B_{New} = B_{old} \cdot T \; *$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1}_{New} = T^{-1} B^{-1}_{old}$$

می دانیم که :

$$E = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_{1k}/y_{rk} & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1/y_{rk} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \\ & & -y_{mk}/y_{rk} & \end{pmatrix}$$

پس :

$$\boxed{B^{-1}_{New} = E \cdot B^{-1}_{old}}$$

✓ ماتریس ها T و E که فقط در یک ستون با ماتریس I فرق می کنند ماتریس مقدماتی هستند.

* تک ستون ماتریس E که با ماتریس I متفاوت است، عبارتست از ستون λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} -y_{1k}/y_{rk} \\ \vdots \\ 1/y_{rk} \\ \vdots \\ -y_{mk}/y_{rk} \end{pmatrix}$$

* فرض کنید مسئله اصلی، فرم کانونی است که با افزودن متغیرهای کمکی (Slack) به فرم

استاندارد در آنجا باشد،

$$B_0^{-1} = I$$

$$B_1^{-1} = E_1 \cdot B_0^{-1} = E_1 \cdot I$$

$$B_2^{-1} = E_2 \cdot B_1^{-1} = E_2 \cdot E_1 I$$

$$B_t^{-1} = E_t \cdot B_{t-1}^{-1} = E_t \cdot E_{t-1} \dots E_2 E_1 \cdot I$$

<u>مثال</u>: یک مسئله اصلی به فرم کانونی داده شده است که دارای 3 محدودیت و

است. ستون متغیر ورودی $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = Y_3$ ، متغیر خروجی، متغیر دوم پایه میانی

λ ستون 2

است. $B_1^{-1} = ?$

$$B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1}$$

$$\lambda = ?$$

$$\lambda = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$$

	x_3
S_1	
S_2	
S_3	

$$B_1^{-1} = E_1 I = E_1 = \begin{pmatrix}1 & & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & & 1\end{pmatrix}$$

فرض کنید X_2 می خواهد جایگزین Y_2 شود، $Y_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

$$\lambda = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1} = E_2 \cdot E_1 \cdot I = \begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 0\\0 & 1/2 & 0\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Revised Simplex Method

روش سیمپلکس تجدید نظر شده

در این روش بمانند جدول S نیستیم و تمام محاسبات به فرم ماتریسی انجام می شود

گام 1 : فرض کنید یک BFS اولیه داریم و $B_0^{-1} = I$ ، $X_B = B_0^{-1} b = b$

گام 2 : متغیر ورودی به پایه ← محاسبه $Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j$ ، $\forall j \in NBV$

و تعیین متغیر ورودی براساس ضابطه روش S و بررسی شرط توقف

گام 3 : متغیر خروجی از پایه ← محاسبه $Y_k = B^{-1} a_k$ و انجام تست نسبت و تعیین متغیر خروجی

گام 4 : محاسبه $B^{-1}_{New} = E B^{-1}_{old}$ و سایر محاسبات مربوط به $X_{B_{New}}$ و Z_{New} و جایگزینی

B^{-1}_{New} به جای B^{-1}_{old} و بازگشت به گام 2

تمرین تشویقی : جزئیات صرفه جویی در محاسبات روش S نسبت به S تجدید نظر

شده به جدول موجود در کتاب را توضیح

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$\max \ Z = 12X_1 + 8X_2$$

$$\text{st} \quad (1) \quad 5X_1 + 2X_2 \leq 150 \qquad + X_3 = 150$$

$$(2) \quad 2X_1 + 3X_2 \leq 100 \qquad + X_4 = 100$$

$$(3) \quad 4X_1 + 2X_2 \leq 80 \qquad + X_5 = 80$$

$$X_j \geq 0 \qquad X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \qquad B_0^{-1} = I$$

$$j \in NBV: \ Z_j - C_j \ \ \text{?} = C_B B^{-1} a_j - C_j = -C_j$$

$$Z_1 - C_1 = -12 \qquad Z_2 - C_2 = -8 \quad \Longrightarrow \quad X_1 : \text{ورودی}$$

$$Y_1 = B_0^{-1} a_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \min\left\{ \frac{150}{5}, \frac{100}{2}, \frac{80}{4} \right\} = 20 \xrightarrow{\text{خروجی}} X_5$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}_{New} = E_1 \cdot B_0^{-1} = E_1 I = E_1$$

$$X_{B_{New}} = B_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Z_{New} = C_{B_{New}} X_{B_{New}} = (0, 0, 12) \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = 240$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1} a_j - C_j : \quad \begin{matrix} Z_2 - C_2 = -2 \\ Z_5 - C_5 = 3 \end{matrix} \longmapsto \text{ورود} : X_2$$

$$Y_2 = B_1^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \min\left\{ -, \frac{60}{2}, \frac{20}{1/2} \right\} = 30$$

X_4 خروجی

$$Y_2 \longmapsto \lambda = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix} \to E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \to B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1}$$

$$\Rightarrow B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -11/8 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/8 \end{pmatrix} \qquad X_{B_{new}} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Z_j - C_j : \quad Z_4 - C_4 = (0, 1, 9/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$Z_5 - C_5 = \quad '' \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{2} \longrightarrow \text{بهینه}$$

$$Z^* = 12 \times 5 + 8 \times 30 = \underline{300}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Duality Theory

تئوری دوگانی

به هر مسئله LP می توان مسئله LP دیگری را وابسته نمود که اگر مسئله اول را مسئله اولیه (Primal) بنامیم مسئله دوم را دوگان یا ثانویه (Duel) می نامیم. مسئله اولیه و دوگان هم از لحاظ شکل ظاهری و هم از لحاظ مقادیر جواب های متغیرها با هم در ارتباط هستند.

** تولید مسئله دوگان در صورتی که مسئله اولیه به فرم کانونی باشد:

(P)

$$\max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

s.t.

$$y_1 - (1)\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$y_2 - (2)\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$y_n - (n)\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(D)

$$\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

s.t.

$$(1)\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$(2)\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a\ y_m \geq c_2$$

$$\vdots$$

$$(n)\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date.

* در مسئله اولیه تعداد متغیرها n و تعداد محدودیت ها m است ولی در مسئله دوگان

دارای m متغیر و n محدودیت داریم.

مثال :

(P)

$$\max z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad &(1)\quad 1x_1 + 9x_2 \le 60 \\ &(2)\quad 2x_1 + 3x_2 \le 45 \\ &(3)\quad 5x_1 - 2x_2 \le 20 \\ &(4)\quad 1x_2 \le 30 \\ &x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

* اول: بررسی کانونی بودن

(D)

$$\min w = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

$$\begin{aligned} &(1)\quad y_1 + 2y_2 + 5y_3 \ge 5 \\ &(2)\quad 9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \ge 6 \\ &y_i \ge 0 \end{aligned}$$

مثال :

$$\min z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad &(1)\quad 3x_1 + x_2 \ge 4 \\ &(2)\quad 5x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ &x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\max 4y_1 + 7y_2$$

$$\begin{aligned} &(1)\quad 3y_1 + 5y_2 \le 6 \\ &(2)\quad y_1 + 2y_2 \le 8 \\ &y_1 , y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

* برعکس مثال بالایی است.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

** تولید مسئله دوگان در صورتی که مسئله اولیه به صورت فرم استاندارد باشد :

* خصوصیات ظاهری مابین مسئله اولیه و دوگان :

- تعداد متغیرهای یک مسئله برابر تعداد محدودیت های مسئله دیگر است و بالعکس

- تابع هدف یک مسئله به فرم max (فرم کانونی) و تابع هدف مسئله دیگر min (دوگان کانونی)

- علامت محدودیت ها در یک مسئله به صورت $\leq$ (فرم کانونی) و در مسئله دیگر به صورت $\geq$ (دوگان کانونی)

- ضرایب تابع هدف یک مسئله بردار مقادیر سمت راست مسئله دیگر است و بالعکس

- بردار ستونی ضرایب یک متغیر، تشکیل دهنده ضرایب سمت چپ تابع محدودیت نظیرش در مسئله دیگر است.

(P)

$$\max \quad z = C_1X_1 + C_2X_2$$

s.t.

① $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \geq b_1 \xrightarrow{*} \end{cases}$

② $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2 \Longrightarrow \begin{cases} a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \geq b_2 \xrightarrow{**} \end{cases}$

$X_1, X_2 \geq 0$

$\xrightarrow{*} \quad -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \leq -b_1$

$\xrightarrow{**} \quad -a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \leq -b_2$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

D

$$\min \; w = b_1 y_1 - b_1 y_2 + b_2 y_3 - b_2 y_4$$

s.t.

1. $a_{11} y_1 - a_{11} y_2 + a_{21} y_3 - a_{21} y_4 \geq c_1$
2. $a_{12} y_1 - a_{12} y_2 + a_{22} y_3 - a_{22} y_4 \geq c_2$

$y_i \geq 0$

تابع هدف $\longrightarrow$ $\min \; w = b_1 (y_1 - y_2) + b_2 (y_3 - y_4)$

محدودیت ها $\longrightarrow$

$$a_{11} (y_1 - y_2) + a_{21} (y_3 - y_4) \geq c_1$$
$$a_{12} (y_1 - y_2) + a_{22} (y_3 - y_4) \geq c_2$$

$y_1 - y_2 \longrightarrow t_1 \qquad y_3 - y_4 \longrightarrow t_2$

$\longrightarrow$ D $\quad \min \; w = b_1 t_1 + b_2 t_2$

s.t. 1. $a_{11} t_1 + a_{21} t_2 \geq c_1$

2. $a_{12} t_1 + a_{22} t_2 \geq c_2$

t_1 , t_2 urs

* متغیر دوگانی که به یک محدودیت = در مسئله اولیه وابسته می شود در مسئله دوگان از لحاظ علامت به صورت urs تعریف می شود.

PAPCO

« جدول خصوصیات ظاهری مابین مسئله اولیه و دوگان »

D	P
تابع هدف min	تابع هدف max
ضرایب تابع محدودیت i-ام	بردار ضرایب متغیر x_j در محدودیت ها
مقادیر سمت راست محدودیت i ام	ضریب متغیر x_j در تابع هدف
$y_i \geq 0$	محدودیت i ام به صورت $\leq$
y_i urs	= ــــ
$y_i \leq 0$	$\geq$ ـــ
محدودیت j ام به صورت $\geq$	$x_j \geq 0$
= ـــ	x_j urs
$\leq$ ـــ	$x_j \leq 0$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

مثال :

P

$\max z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$

s.t. ① $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$

② $2X_1 - X_2 + 3X_3 \; \boxed{=} \; 2$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

D

$\min 5y_1 + 2y_2$

① $y_1 + 2y_2 \geq 5$

② $2y_1 - y_2 \geq 12$

③ $y_1 + 3y_2 \geq 4$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \; \boxed{urs}$

نکته : علامت محدودیت ها + علامت متغیرها

✓ با فرم کانونی که در ذهن داریم : علامت متغیرها = علامت فرم کانونی ← علامت محدودیت ها

D مثل دوگان کانونی .

✓ علامت متغیرهای D متناسب با علامت محدودیت های P

مثال :

P

$\max z = 4X_1 + 5X_2$

① $X_1 + 3X_2 \leq 4$

② $X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 \geq 0 \;,\; X_2 \leq 0$

$\min w = 4y_1 + 2y_2$

s.t. ① $y_1 + y_2 \geq 4$

② $3y_1 - y_2 \leq 5$

$y_1, y_2 \geq 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 3X_2 - 2X_3$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad &(1) \quad X_1 - 6X_2 + X_3 \geq 2 \\
&(2) \quad 5X_1 + 7X_2 - 2X_3 = -4 \\
&\quad X_1 \leq 0, \; X_2 \geq 0, \; X_3 \text{ urs}
\end{aligned}$$

(D)

$$\text{Min } w = 2y_1 - 4y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad &(1) \quad y_1 + 5y_2 \leq 8 \\
&(2) \quad -6y_1 + 7y_2 \geq 3 \\
&(3) \quad y_1 - 2y_2 = -2 \\
&\quad y_1 \leq 0 \quad y_2 \text{ urs}
\end{aligned}$$

** ارتباط بین جواب ها مسائل اولیه و دوگان :

قضیه خاصیت ضعیف دوگانی : Weak Duality Property

اگر مسئله اولیه به فرم کانونی باشد و X_0 جواب موجه آن بوده و Y_0 نیز یک جواب موجه برای مسئله دوگان آن باشد در این صورت همواره : $(Cx_0)\ Z_0 \leq w_0\ (y_0 b)$

که در آن Z_0 و w_0 به ترتیب مقادیر تابع هدف اولیه و دوگان به ازای X و Y است

اثبات : تمرین تشویقی ! Winston p: 290

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(P) $\max Z = 4X_1 + 7X_2$

s.t. ① $3X_1 + 5X_2 \leq 6$

② $X_1 + 2X_2 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0$

(D) $\min w = 6y_1 + 8y_2$

s.t. ① $3y_1 + y_2 \geq 4$

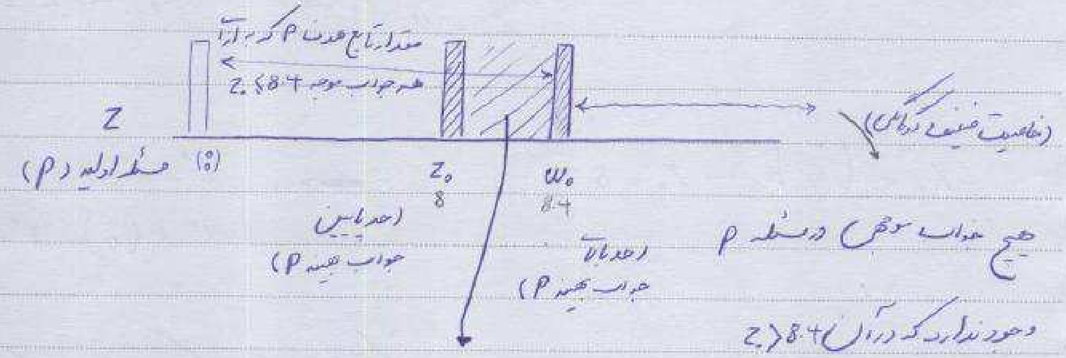
② $5y_1 + 2y_2 \geq 7$

$y_1, y_2 \geq 0$

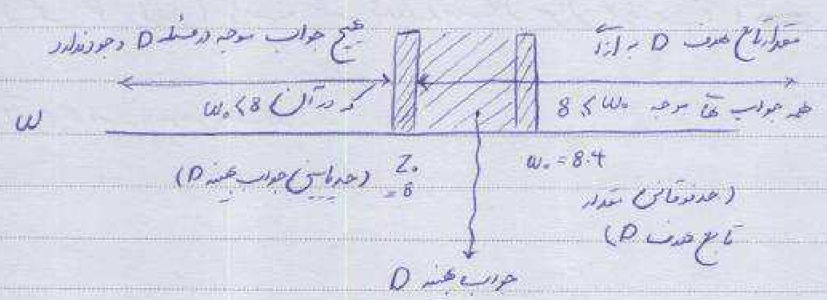
P جواب موجه : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Z_0 = 8$

D ج : $\begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_0 = 8.4$

آیا می‌توان جواب موجه در P یافت که $Z = 9$ ؟ نه، چون باید از 8.4 کوچکتر.



جواب موجه : جواب بهینه P در این ناحیه قرار دارد



Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر X_0 و Y_0 جواب های موجه مسائل P و D باشند بطوریکه $Z_0 = W_0$ درانصورت

$X^* = X_0$ و $Y^* = Y_0$

خاصیت ضعیف دوگان

P جواب موجه : X_0 $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} Z_0 \leq W^* \\ , Z_0 = W_0 \end{array}\right\} \Rightarrow W_0 \leq W^* \Rightarrow W_0 = W^*$

D جواب موجه Y_0 $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} Z^* \leq W_0 \\ , Z_0 = W_0 \end{array}\right\} \Rightarrow Z^* \leq Z_0 \Rightarrow Z^* = Z_0$

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix} \rightarrow Z_0 = 8.4 \Longrightarrow Z^* = W^* = 8.4$

$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/5 \end{pmatrix} \quad Y^* = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

* اگر مسئله P بیکران باشد آنگاه D دارای جواب موجه نیست !

* اگر مسئله D بیکران باشد ← P . . . . .

* مسئله P دارای جواب بهینه محدود است (بیکران نیست) $\Longleftrightarrow$ هم P و هم D

دارای جواب موجه باشند . [؟]

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$(P)\quad \max\ z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 40 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$(D)\quad \min\ w = 10y_1 + 40y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 \geq 1 \quad * \rightarrow \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

D ⟸ دارای جواب موجه نیست ← بیکران یا موجه ندارد

(0,0) دارد ⟸ بیکران

* D جواب موجه ندارد ← P جواب موجه ندارد

← P جواب بیکران دارد

قضیه اساسی دوگانی : Foundamental Theorem of Duality

ارتباط بین جواب های مسائل P و D بصورت زیر است :

D

P \ D	جواب موجه دارد	جواب موجه ندارد
جواب موجه دارد	هم D و هم P دارای جواب بهینه هستند $z^* = w^*$	مسئله P بیکران
جواب موجه ندارد	مسئله D بیکران	هم P و هم D دارای ناحیه موجه تهی هستند

مثال :

$$\max\ z = 5x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.}\quad (1)\ \ x_1 - x_2 \leq -4$$
$$(2)\ \ -x_1 + x_2 \leq -2 \qquad (1)+(2) \rightarrow 0 \leq -6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

⟸ P جواب موجه ندارد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Leftarrow D$ یا بیکران است یا جواب موجه ندارد:

جواب عیان می‌شوند و سمت راست S_3 و $\Rightarrow$ $X\ \ o \geq 8$ $\Rightarrow$ جواب موجه ندارد

قضیه: در یک مسئله به فرم کانونی: (P) $\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$ فرض کنید X^* و Z^*

مقادیر بهینه به ازای پایه بهینه B^* باشد. در اینصورت: $Y^* = C_{B^*} B^{*^{-1}}$ جدول simplex

اثبات: (P) $\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \min w = Yb \\ YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$

اولاً می‌دانیم $Z^* = C_{B^*} B^{*^{-1}} b$ و از طرف دیگر تابع هدف مسئله D به ازای Y^*

برابر است با: $w = \underset{\sim}{Y^* b} = \underset{\sim}{C_{B^*} B^{*^{-1}}}\, b \Longrightarrow$

$w = Z^* \xrightarrow{\text{خاصیت ضعیف دوگانگی}} w = w^*$

ثانیاً باید ثابت کنیم که Y^* جواب موجه در فضای D است یعنی:

$\begin{cases} Y^* A \geq C \\ Y^* \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C_{B^*} B^{*^{-1}} A \geq C \\ C_B B^{*^{-1}} \geq 0 \end{cases}$

$C_B B^{*^{-1}} A = C_B B^{*^{-1}} (a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq (C_1, \ldots, C_n)$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

یا $\forall j: C_B \, a_j \geq C_j$

اما می دانیم که در پایه بهینه P $\forall j: z_j - c_j \geq 0$ و یا به عبارتی $\forall j: C_B B^{*-1} a_j \geq c_j$

یعنی رابطه برقرار است.

از طرف دیگر می دانیم که $C_B B^{*-1}$ در واقع ($z_j - c_j$) متغیرهای کمکی در جدول بهینه P است

** تعیین مقادیر بهینه متغیرهای دوگان از روی جدول بهینه مسئله P **

* اگر مسئله P به فرم کانونی باشد مقادیر بهینه متغیرهای دوگان به صورت $Y^* = C_B B^{-1}$ بدست می آید که در آن B ماتریس پایه بهینه در مسئله P است.

* در واقع مقادیر بهینه متغیرهای دوگان مسئله P (که به فرم کانونی است) از روی ضرایب Simplex جدول بهینه مسئله P تعیین می شود

* ضرایب Sim-plex در جدول بهینه یک مسئله P به فرم کانونی در واقع $z_j - c_j$ متغیرهای کمکی مسئله P در جدول بهینه هستند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

(P)
$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t.} \quad (1)\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500$$
$$(2)\quad 3x_1 + 2x_3 \leq 460$$
$$(3)\quad x_1 + 4x_2 \leq 420$$
$$x_i \geq 0$$

می دانیم که در جدول بهینه P متغیرهای پایه عبارتند از:

$X_B^* = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_3 \end{pmatrix}$: مطلوب است تعیین Y^* ؟

$$Y^* = C_B B^{-1} \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{*-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^* = (2, 5, 0) \cdot B^{-1} = (\underset{y_1^*}{1}, \underset{y_2^*}{2}, \underset{y_3^*}{0})$$

* درصورتی که P به فرم کانونی باشد، دراینصورت Y^* از روی مقادیر $z_j - c_j$ متغیر کمکی وابسته به آن به دست می آید

* اگر مسئله P به فرم max باشد دراینصورت با توجه به نوع محدودیتی که متغیر دوگان به آن وابسته است:

اگر محدودیت به صورت $\leq$ باشد $\Rightarrow$ y_i^* برابر $z_j - c_j$ متغیر کمکی s که وابسته به آن است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر محدودیت به صورت $\geq$ یا $=$ باشد $\Rightarrow$

y_i^* برابر است با مقدار $z_j - c_j$ متغیر مصنوعی R_i را بسته به آن بدون در نظر گرفتن عبارت M

R_i

جدول بهینه

$$(z_j - c_j)_{R_i} = C_B B^{-1} a_j - c_j$$

M + ... فاقد ضریب M

مثال :

Ⓟ $\max Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

$$\text{s.t.}\quad ① \quad X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 15$$

$$② \quad 2X_2 - X_3 \geq 5$$

$$③ \quad 2X_1 + X_2 - 5X_3 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

هدف آن است که با داشتن جدول بهینه P

مقادیر بهینه D را بیابیم ؟

$\boxed{y_1}$ ① $X_1 + 3X_2 + 2X_3 + \boxed{S_1} = 15$ $\qquad y_1^* = \frac{51}{23} \qquad S_1^* = 0$

y_2 ② $2X_2 - X_3 - e_1 + R_1 = 5$ $\qquad y_2^* = \frac{-58}{23} \qquad R_1^* = 0$

y_3 ③ $2X_1 + X_2 - 5X_3 + R_2 = 10$ $\qquad y_3^* = \frac{9}{23} \qquad R_2^* = 0$

همیشه ؟ به تقسیم کنید

	X_1	X_2	X_3	S_1	e_1	R_1	R_2	RHS
Z	0	0	0	$51/23$	$58/23$	$M - \frac{58}{23}$	$M + \frac{9}{23}$	$565/23$
X_3					$5/23$	$-5/23$		$15/23$
X_2					$-9/23$	$9/23$		$65/23$
X_1					$17/23$	$-17/23$		$120/23$

$= W^* = Z^*$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{array}{cc} e_1 & R_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \Leftarrow$$

* اگر محدودیتی به صورت $\geq$ باشد به جای R می‌توانیم از e استفاده کنیم ←

مقدار بهینه = قرینه $c_j - z_j$ مربوط به e

Complementary Slackness Theorem

قضیه لنگی مکمل

اگر X_0 یک جواب موجه برای مسئله P که به فرم کانونی است باشد و Y_0 جواب موجه

← $\leq$ داریم

مسئله D وابسته به آن باشد در اینصورت: $X^* = X_0$ و $Y^* = Y_0$ است $\Leftrightarrow$

$$\forall i : S_i \times y_i = 0 \qquad \forall j : e_j \times x_j = 0$$

که در آن S_i متغیر کمکی محدودیت i مسئله P و e_j متغیر مازاد محدودیت j مسئله D

($\geq$ ← e حتماً داریم)

است

x_j و y_i مقادیر متغیرهای P و D در جواب‌های موجه X_0 و Y_0 هستند.

مثال:

$$\text{Max } Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } (1)\quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + S_1 \leq 48 \\ (2)\quad & 4x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + S_2 \leq 20 \\ (3)\quad & 2x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + S_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض: $x_1^* = 2 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 8$

مقادیر بهینه متغیرهای دوگان؟

Subject:
Year. Month. Date. ( )

(D) $\min\ w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$

$$\text{s.t.}\quad (1)\quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 - e_1 = 60$$
$$(2)\quad 6y_1 + 2y_2 + \tfrac{3}{2}y_3 - e_2 = 30$$
$$(3)\quad y_1 + \tfrac{3}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 - e_3 = 20$$
$$y_i \geq 0$$

$$X_1^*,\ X_2^*,\ X_3^* \xrightarrow[\text{معادلات مسئله P}]{\text{قرار دادن در دستگاه}} S_1^* = 24 \quad S_2^* = 0 \quad S_3^* = 0$$

قضیه : $e_1 X_1 = 0 \Rightarrow e_1^* = 0 \qquad e_3 X_3 = 0 \Rightarrow e_3^* = 0$

$$S_1 y_1 = 0 \Rightarrow y_1^* = 0 \xrightarrow[\text{معادلات}]{\text{دستگاه}} \begin{cases} 4y_2 + 2y_3 = 60 \\ \tfrac{3}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3 = 20 \end{cases}$$

حل P2

$$\Rightarrow y_2^* = y_3^* = 10 \Rightarrow e_2^* = 5$$

مثال: تعیین جواب بهینه مسئله زیر؟

$$\min\ Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 + 3X_5$$
$$\text{s.t.}\quad (1)\quad X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + 3X_5 \geq 4$$
$$(2)\quad 2X_1 - 2X_2 + 3X_3 + X_4 + X_5 \geq 3$$
$$X_j \geq 0$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

(p) : $\max z = 4y_1 + 3y_2$

s.t.

① $y_1 + 2y_2 \leq 2$

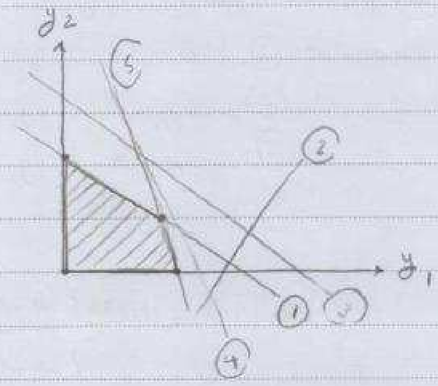
② $y_1 - 2y_2 \leq 3$

③ $2y_1 + 3y_2 \leq 5$

④ $y_1 + y_2 \leq 2$

⑤ $3y_1 + y_2 \leq 3$

$y_i \geq 0$



$\begin{cases} ① \\ ⑤ \end{cases} \Longrightarrow y_1^* = 4/5 \quad y_2^* = 3/5$

5 تا slack که داریم : $s_1, \dots, s_5$

* نقطه بهینه D از برخورد محدودیت‌های 1 و 5 به دست می‌آید:

$s_1^* = 0 ,\ s_5^* = 0 - s_2^* , s_3^* , s_4^* > 0$ تعیین مکمل $\longrightarrow s_i^* x_i^* = 0$

$\Longrightarrow \underline{x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0}$ (I)

$y_1^* = 4/5 \quad y_2^* = 3/5 \Longrightarrow e_i^* y_i^* = 0 \longrightarrow e_1^* = e_2^* = 0$ (II)

$I, II \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{cases} \longrightarrow \underline{x_1^* = x_5^* = 1}$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعبیر اقتصادی دوگان

(مدل برنامه ریزی تولید)

P

$$\text{Max } Z = \sum_j c_j x_j$$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

D

$$\text{Min } W = \sum b_i y_i$$

$$\sum a_{ij} y_i \geq c_j$$

$$y_i \geq 0$$

(x_j : میزان تولید محصول j ام

a_{ij} : میزان استفاده از منبع i توسط یک واحد محصول j

b_i : حداکثر میزان دستیابی به منبع i)

* اگر فرض کنیم که یک مسئله کانونی از روی یک مدل برنامه ریزی تولید جهت حداکثر سازی سود ناشی از تولید محصولات مختلف به دست می آید:

در مسئله دوگان نظیرش می خواهیم "کل ارزش منابع مورد استفاده حداقل شود"

$\Rightarrow$ y_i : ارزش منبع i ام

* ارزش بهینه منابع مسئله P در واقع نقاط بهینه مسئله D است:

$$y^* = C_B B^{-1}$$

ارزش بهینه منبع i ام : $\longrightarrow y_i^* = \partial z / \partial b_i$

$$\partial z / \partial b = C_B B^{-1}$$

به شرط اینکه "پایه فعلی بهینه باشد و همچنان بهینه باقی بماند"

ـــ = نسبت تغییر در تابع هدف به ازای یک واحد تغییر در منبع مورد نظر.

قیمت سایه‌ای (Shadow Price) محدودیت iام = نسبت تغییر در مقدار تابع هدف

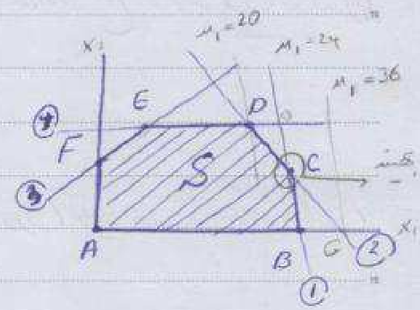
به ازای یک واحد تغییر در مقدار سمت راست

ـــ ؟ = قیمت سایه‌ای محدودیت iام

مثال:

$$\max Z = 5X_1 + 4X_2$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad &(1)\quad 6X_1 + 4X_2 \le 24 \longrightarrow m_1 \text{ ماده اولیه} \\
&(2)\quad X_1 + 2X_2 \le 6 \longrightarrow m_2 \\
&(3)\quad -X_1 + X_2 \le 1 \longrightarrow m_3 \\
&(4)\quad X_2 \le 2 \longrightarrow m_4 \\
&X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}$$



$$C \to (3, \tfrac{3}{2}) \Longrightarrow X_1^* = 3 \quad X_2^* = \tfrac{3}{2} \quad Z^* = 21$$

m_1 و m_2 تمام می‌شوند - m_3 و m_4 باقی می‌ماند

$$\frac{\text{مقدار تغییر در تابع هدف } z \text{ از D به G}}{\text{مقدار تغییر در ماده اولیه } m_1 \text{ هنگامی که از D به G}} = \frac{30-18}{36-20} = \frac{3}{4} = \frac{\partial z}{\partial b_1}$$

(D) (جبری):

$$\begin{aligned}
&\min w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4 \\
s.t.\quad &(1)\quad 6y_1 + y_2 - y_3 \ge 5 \\
&(2)\quad 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \ge 4 \\
&y_i \ge 0
\end{aligned}
\Longrightarrow
\begin{aligned}
&y_1^* = 3/4 \\
&y_2^* = 1/2 \\
&y_3^* = y_4^* = 0
\end{aligned}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$B(4,0)$ $m_1=4$ $Z_1^*=20$

$O(\frac{8}{3},2)$ $m_2=\frac{20}{3}$ $Z_2^*=\frac{64}{3}$

تمرین تشویقی: تغییرات m_2 به صورت هندسی

ارزش کل منابع مورد استفاده توسط هر واحد محصول j : $\sum a_{ij} y_i \geq c_j$

Z_j = قیمت تمام شده هر واحد محصول

محدودیت ها D : $Z_j \geq c_j$

* P فرم کانونی :

	X_j
	$Z_j - c_j < 0$
X_B	

$\Downarrow$

	X_j
	$\forall j: Z_j - c_j \geq 0$
X_B^*	Opt

$Z_j \geq c_j$ ← محصول از لحاظ اقتصادی به صرفه است

$\boxed{\text{Simplex}}$

$$\max \quad z = CX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

(سمت راست +)

همواره شرط موجه بودن برقرار است، تمام X_B ها BFS هستند : $\forall i: b_i \geq 0$

برقراری شرط بهینگی : $\forall j: Z_j - c_j \geq 0$ (در D موجه باشد)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Duel Simplex

سیمپلکس دوگان

همواره شرط بهینگی برقرار باشد : $\forall j : z_j - c_j \geq 0$ (در D موجه)

$\Downarrow$

برقراری شرط موجه بودن $\forall i ; b_i \geq 0$ (در P موجه)

✓ روش سیمپلکس دوگان برای حل مسئله

$$\underline{\max} \; z = cx$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

گام شروع : در یک مسئله LP با مشخصات فوق از جوابی شروع می‌کنیم که برای آن داریم :

$\forall j : z_j - c_j \geq 0$ اما به ازای بعضی i ها داریم : $\exists i ; b_i < 0$

گام انتخاب متغیر خروجی از پایه : متغیر X_{B_r} جهت خروج از پایه انتخاب می‌شود اگر

$X_{B_r} = \min \{ X_{B_i} \mid X_{B_i} < 0 \}$ شرط توقف : $\forall i : X_{B_i} \geq 0$

گام انتخاب متغیر ورودی پایه : متغیر X_k جهت ~~خروج از~~ ورود به پایه انتخاب می‌شود اگر

تست نسبت روش simplex دوگان $\rightarrow \min \left\{ \frac{z_j - c_j}{|y_{rj}|} \mid y_{rj} < 0 \right\}$

→ اگر در اجرای تست نسبت $\forall j : y_{rj} \geq 0$ شد، در اینصورت مسئله D بیکران است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گام انجام عملیات سطری : جهت خروج X_{Br} و ورود X_k و انجام عملیات سطری

و بازگشت به گام انتخاب متغیر ورودی به پایه

* هر مسئله LP که به وسیله Simplex قابل حل باشد با D-Simplex هم قابل حل و بالعکس.

مثال :

$$\max Z = -2X_1 + X_2$$

$$\text{s.t.}\quad ①\ 3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$②\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$③\ X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تمرین تشویقی : حل با Simplex

$$\Rightarrow\ ①\ -3X_1 - X_2 \leq -3 \ \rightarrow\ -3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$

$$②\ -4X_1 - 3X_2 \leq -6 \qquad -4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$$

$$③\ X_1 + 2X_2 \leq 3 \qquad X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	2	1	0	0	0	0
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	-4	-3	0	1	0	-6 خروجی
S_3	1	2	0	0	1	3
Z	2/3	0	0	1/3	0	-2
S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
S_3	-5/3	0	0	2/3	1	-1

تست نسبت :

$$\min\left\{\frac{2}{|-4|}, \frac{1}{|-3|}\right\} = \frac{1}{3}$$

$$\min\left\{\frac{2/3}{|-5/3|}, \frac{1/3}{|-1/3|}\right\} = 2/5 \ \longrightarrow\ X_1 \text{ ورودی}$$

* برای شروع این روش حتماً باید یک جواب اولیه شروع داشته باشیم به نحوی که در مسئله Max : $\forall j : z_j - c_j \geq 0$ اما اگر بعضی یا تمام متغیرها مقادیر سمت راست منفی بودند مشکلی نیست.

* اگر چنین جوابی وجود نداشته باشد باید از روش های تولید جواب اولیه سیمپلکس دوگان استفاده کرد.

مثال ۱ :

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
z	0	0	$2/5$	$1/5$	0	$-2\frac{2}{5}$
x_1	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	$3/5$
x_2	0	1	$-4/5$	$-3/5$	0	$6/5$
S_3	0	0	-1	1	1	0

شرط توقف : $\forall i : b_i \geq 0 \rightarrow \quad x_1^* = 3/5 \quad x_2^* = 6/5 \quad z^* = -2\frac{2}{5}$

Subject:
Year: Month: Date: ( )

Sensitivity Analysis

تجزیه و تحلیل حساسیت

در تجزیه و تحلیل حساسیت بعد از اینکه جواب بهینه مسئله LP بدست آمد به بررسی اینکه در اثر تغییر در داده‌های مسئله در جواب بهینه چه تغییری رخ می‌دهد می‌پردازیم

(LP)
$$\max\ z = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

	X_j	
z	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
X_B	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

Opt.

مثال:

$$\max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

s.t.
(1) $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 450 \rightarrow 602$
(2) $3X_1 + 2X_3 \leq 400 \rightarrow 644$
(3) $X_1 + 4X_2 \leq 420 \rightarrow 588$
$X_i \geq 0$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	4	0	0	1	2	0	1350
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

① $b_{Current} \longrightarrow b_{New}$: $\checkmark\ (X_B)_{Current} \longrightarrow (X_B)_{New} = B^{-1} b_{New}$

$\checkmark\ Z_{Current} \rightarrow Z_{New} = C_B B^{-1} b_{New}$

پایه فعلی بهینه است (سمت راست مثبت و $Z_j - c_j$ ها تغییر نکرده) $\Leftarrow \geq 0$ $(X_B)_{New}$

با D-Simplex ادامه می‌دهیم $\Leftarrow$ (حداقل یکی از عناصرش منفی شود) : $(X_B)_{New}$

$$(X_B)_{New} = B^{-1} b_{New} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 602 \\ 644 \\ 588 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 322 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$Z_{New} = (2, 5, 0)(X_B)_{New} = 1890$ $\rightarrow$ هیچ مسئله تغییر نکرده

② تغییر در ضرایب تابع هدف (c_j ها)

2-1 : تغییر در c_j یک متغیر غیرپایه نظیر x_j : (max)

$(Z_j - c_j)_{Cu} \longrightarrow (Z_j - c_j)_{New}$

$\checkmark\ (Z_j - c_j)_{New} = C_B B^{-1} a_j - (c_j)_{New}$

$\geq 0 \Rightarrow$ جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند

$< 0 \Rightarrow$ ادامه با روش Simplex

Subject:
Year. Month. Date.

* در تابع هدف : ضریب x_1 : $3 \to 5$

جواب فعلی هم چنان ← $(z_1-c_1)_{New} = C_B B^{-1} a_j - (c_j)_{New} = 2 > 0$

$C_B \to (1,2,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

بهینه است.

راه ساده تر : فقط در c_j تغییر ده ...

2-2 : تغییر در c_j یک متغیر پایه (C_B تغییر می کند) : { $z_j - c_j$ همه ها ؟ می مانند } ها

$\forall j \in NBV : (z_j - c_j)_c \to (z_j - c_j)_{New}$

$(z_j - c_j)_{New} = (C_B)_{New} B^{-1} a_j - (c_j)_{New} \to \forall j \in NBV : \geq 0$ بهینه

$\searrow \exists j : < 0$ بهینه

* در تابع هدف : $3 \to 5 \quad 2 \to 3 \quad 5 \to 4$

$(C_B)_{Current} = (2,5,0) \longrightarrow (C_B)_{New} = (3,4,0)$

$(z_1 - c_1)_{New} = (C_B)_N B^{-1} b - (c_1)_{New} = \frac{1}{4}$

$*(C_B)_N B^{-1} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0)$

$(z_2 - c_2)_{New} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - (c_2)_{New} = 3 - 3 = 0$

همیشه داشتیم $B^{-1} a_j = y_j$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

③ اضافه کردن متغیر جدید X_j :

اضافه شدن متغیر جدید X_{n+1} به مسئله LP به فرض متغیر در مراحل آخر اساسی است:

$C_{n+1} = 0 \longrightarrow (C_{n+1})_{New}$

$a_{n+1} = 0 \longrightarrow (a_{n+1})_{New}$

در این هنگام ستون X_{n+1} را به جدول جدید اضافه می‌کنیم به نحوی که

$B^{-1}(a_{n+1})_{New}$, $Z_{n+1} - C_{n+1} = C_B B^{-1} a_{n+1} - C_{n+1}$

* X_7 را داریم که $a_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_7 = 4$:

$Z_7 - C_7 = C_B B^{-1} a_7 - C_7 = (2, 5, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 = -1$

$$B^{-1} a_7 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ حذف کردن متغیر X_j :

* اگر متغیری که می‌خواهیم حذف کنیم در جدول بهینه غیرپایه ای باشد که جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند (مقدارش 0 است)

* برای حذف کردن یک متغیر پایه فعلی کافی است ضریب آن را در تابع هدف به

PAPCO

Subject :
Year Month Date

ضریب نامناسبی تبدیل کنیم :

$(C_j)_{New} \xrightarrow{Max} -M$

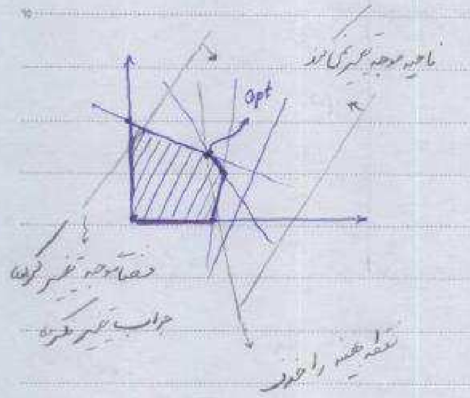
$(C_j)_{New} \xrightarrow{Min} +M$

* X_2 : حذف ؟ $C_2 = 2 \longrightarrow -M$

سطر Z : $\frac{9}{2} + \frac{1}{4}M$ 0 0 $-\frac{1}{2}M$ $\frac{1}{4}M + \frac{5}{2}$ 0

$\{ C_B = (-M, 5, 0) \quad C_B B^{-1} = (-\frac{1}{2}M, \frac{1}{4}M + \frac{5}{2}, 0) \}$

⑤ اضافه کردن محدودیت جدید :



در این حالت، ابتدا جواب بهینه فعلی در محدودیت جدید بررسی می‌شود که اگر در آن صدق کند به معنی آن است که محدودیت جدید تأثیری در جواب بهینه فعلی ندارد اما اگر در آن صدق نکند یعنی محدودیت جدید باعث حذف نقطه بهینه فعلی شده است. در اینصورت محدودیت جدید به انتهای جدول بهینه اضافه شده (با این منظور متغیری وابسته به محدودیت به عنوان متغیر پایه اضافی شود) و مسئله با روش D-Simplex ادامه می‌یابد «بعد از انجام عملیات سطری».

Subject:

Year. Month. Date. ( )

1. $X^* = (0, 100, 230)$ اضافه: $3X_1 + X_2 + X_3 \leq 500$

جواب بهینه فعلی در آن صدق می کند → جواب بهینه تغییر نمی کند

2. اضافه: $3X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 500$ صدق نمی کند! → $530 \nleq 500$

$$3X_1 + 3X_2 + X_3 + S_4 = 500$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
Z	0	0	0	1	2	0	0	1350
X_2	$-1/4$	1	0	$1/2$	$-1/4$	0	0	100
X_3	$3/2$	0	1	0	$1/2$	0	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	0	20
S_4	3	3	1	0	0	0	1	500

ج Simplex ثنوی

S_4	$9/4$	0	0	$-3/2$	$1/4$	0	1	-30

...

Subject:
Year: Month: Date: ( )

⑥ تغییر در ضرایب ستون‌ها تشکیل دهنده A : $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

	x_j	
	$C_B B^{-1} a_j - C_j$	$C_B B^{-1} b$
	$B^{-1} a_j$	$B^{-1} b$

6-1) تغییر در a_j وابسته به یک متغیر غیرپایه : در این حالت $Z_j - C_j$ و بردار y_j

وابسته به متغیر تغییر می‌کند : $(Z_j - C_j)_{New} = C_B B^{-1} (a_j)_{New} - C_j$

(Max) $\nearrow \geq 0 \rightarrow$ جواب بهینه فعلی تغییر نمی‌کند

$\searrow < 0 \rightarrow$ ادامه با روش S

$* \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{New} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (Z_1 - C_1)_{New} = (1, 2, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 = -3$

$(y_1)_{New} = B^{-1} (a_1)_{New} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ خروجی X_2 $\qquad$ ورودی : $X_1 \longleftarrow$

6-2) اگر a_j وابسته به متغیر پایه ای تغییر کند در این حالت در حقیقت ماتریس B و

در نتیجه B^{-1} تغییر می‌کند

x_j از مسئله خارج شود

$C_j \rightarrow -M$:

$x_j < a_j, c_j \quad — \quad a'_j, c_j > x'_j$

در این حالت ابتدا فرض می‌کنیم متغیر جدیدی نظیر x'_j با بردار ستونی a'_j و ضرایب

Subject:
Year. Month. Date. ( )

c_j به مسئله اضافه شده و هم چنین سعی می کنیم که به صورت هم زمان x_j با تغییر در ضریب c_j از مسئله حذف شود. در صورتی که در نهایت در جواب نهایی مسئله x_j در پایه قرار گرفت جواب بهینه جدید بدست می آید و در غیر این صورت اگر $x_j^* > 0$ ، مسئله دارای جواب موجه می باشد.

مثال: $\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4$

Optimal Solution

Slacks: X_5, X_6

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS	X_1'
Z	0	$1 \;\; -\frac{3}{4}M - \frac{1}{2}$	$3 \;\; -\frac{1}{4}M + \frac{5}{2}$	0	$2 \;\; -\frac{1}{4}M + \frac{3}{2}$	$0 \;\; -\frac{1}{4}M - \frac{1}{2}$	12	$-\frac{1}{2}M - 4$
X_4	0	$5/4$	$7/4$	1	$3/4$	$-1/4$	4	
X_1	1	$3/4$	$1/4$	0	$1/4$	$1/4$	2	

$$\left.\begin{aligned} a_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} &\longrightarrow a' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ \underbrace{c_1 = 2}_{-M} &\longrightarrow c_1' = 5 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ اضافه شدن متغیر جدید X_1'

حذف X_1

$$(Z_j - C_j)_{new} = (2, -M)\, B^{-1} a_j - C_j$$

$$\underline{X_1'} \text{ مربوط به } (Z_j - C_j) = (2, -M) \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 5 = -\frac{1}{2}M - 4$$

X_2: وارد X_1: خارج ...

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اثر تغییرات همزمان در پارامترها — Winston (ترانس 100%)

Parametric Linear Programming (برنامه ریزی پارامتری (حفظ))

$$\max\ z = (c + td)x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$\alpha \leq t \leq \beta$$

* ضرایب پارامترهای c و d دانسته شده است

* مسئله LP در واقع حالت خاصی از این مسئله است وقتی $t=0$.

اگر $\alpha \leq t=0 \leq \beta$ باشد در این حالت ابتدا مسئله را حل می‌کنیم و سپس با تحلیل حساسیت دامنه آن نظیر (α_1, β_1) که جواب فعلی هم چنان بهینه است را بدست آورده و سپس با گسترش دامنه به نواحی دیگر سعی در حل مسئله در تمام بازه (α, β) می‌نماییم.

مثال :

$$\max\ z = (1-2t)x_1 + (3-t)x_2$$

① $x_1 + x_2 + s_1 = 6$

② $-x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$

$t \geq 0$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Subject:
Year. Month. Date.

		X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
	Z	$-1+2t$	$-3+t$	0	0	0
	S_1	1	1	1	0	6
$t=0$	S_2	-1	2	0	1	6
	Z	0	0	$5/3-5/3t$	$2/3-1/3t$	$14-8t$
	X_1	1	0	$\boxed{2/3}$	$-1/3$	2
$t=0$	X_2	0	1	$1/3$	$1/3$	4

بهینه

$C:(1,3) \longrightarrow (1-2t,\ 3-t)$ $\qquad (Z_j-C_j)_{New} = (1-2t,\ 3-t)\, B^{-1}a_j - C_j$

$$\begin{cases} (Z_j-C_j)_{S_1} = 5/3 - 5/3\,t \\ (Z_j-C_j)_{S_2} = 2/3 - 1/3\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5/3 - 5/3\,t \geq 0 \\ 2/3 - 1/3\,t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1 \quad \text{opt.}$$

if $t>1 \rightarrow$ S_1 وارد X_1 خارج

					RHS
Z	$-5/2+5/2\,t$	0	0	$3/2-1/2\,t$	$9-3t$
S_1	$3/2$	0	1	$-1/2$	3
X_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	3

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

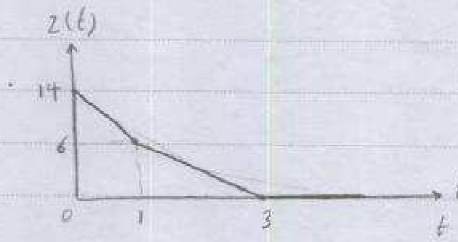
$$\begin{cases} -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}t \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \geq 0 \end{cases} \longrightarrow 1 \leq t \leq 3$$

اگر $t \geq 3$ ⟶ S_2 : وارد X_2 : خارج ⇐ $\underbrace{S_1, S_2}_{\text{پایه}}$

⟵ به جدول اولیه رسیدیم : اگر $t \geq 3$ بهینه است

* خلاصه نتایج برنامه ریزی پارامتری مسئله *** در امتحان حتماً نوشته شود

$t \backslash x^*$	x_1^*	x_2^*	z^*
$0 \leq t \leq 1$	2	4	$14-8t$
$1 \leq t \leq 3$	0	3	$9-3t$
$t \geq 3$	0	0	0



تابع قطعه قطعه خطی محدب

↑

برنامه ریزی پارامتری روی تابع هدف max

✓ اگر $t=1$, $t=3$ ⟵ ترکیب متغیرهای پایه عوض می شود اما Z^* ثابت ⇐

جواب چندگانه.

اثبات ریاضی ⟵ $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ثابت تابع هدف

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برنامه ریزی پارامتری در حالتی که مقدار سمت راست پارامتری است ← تمام /


دستیارخوب را به دوستانتان معرفی کنید...